

МАТЕМАТИКА

А. А. ДЕЗИН

**ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $W_2^{(m)}$**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 IV 1954)

Пусть Ω — область n -мерного пространства, ограниченная достаточно гладкой поверхностью S .

Пусть $u \in W_2^{(m)}(\Omega)$. Рассмотрим функционал

$$H(u) = D(u) + 2\rho(u),$$

где

$$D(u) = \int_{\Omega} \sum_{\Sigma \alpha_i = m} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 d\Omega,$$

а $\rho(u)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\rho(P^{(m-1)}(x)) = 0, \quad (1)$$

где $P^{(m-1)}(x)$ — произвольный полином от переменных x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) степени не выше $m-1$. Функционал ρ предполагается линейным.

Доказательство следующих утверждений является дословным повторением соответствующих доказательств, приведенных в книге ⁽¹⁾, на которые мы будем ссылаться.

Теорема 1. Функционал $H(u)$ ограничен снизу (⁽¹⁾, стр. 108).

Доказательство не зависит от m .

Теорема 2. Существует функция $u \in W_2^{(m)}$ такая, что $H(u) = -d$, где $-d = \inf H(u)$. Для этой функции при любом $\xi \in W_2^{(m)}$ справедливо равенство

$$D(u, \xi) + \rho(\xi) = 0$$

(⁽¹⁾, стр. 108—109).

Подчиним теперь функционал $\rho(u)$ еще одному дополнительному условию:

(А) $\rho(u^0) = 0$ для всех $u^0 \in W_2^{(m)}$ и принимающих граничное значение $u^0|_S = 0$ в смысле метрики на S , определяемой теоремами вложения, т. е. в смысле пространства $W_q^{(h)}(S)$, где k и q зависят от m и n (⁽¹⁾, стр. 112).

Теорема 3. Если $\rho(\xi)$ удовлетворяет условиям (1) и (А), то существует $u \in W_2^{(m)}$ такая, что:

1) функция u имеет в Ω непрерывные производные любого порядка и удовлетворяет уравнению

$$\Delta^m u = 0;$$

2) $\int_{\Omega} \sum_{\Sigma \alpha_i = m} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \frac{\partial^m \xi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = -\rho(\xi)$, где ξ — произвольная функция из $W_2^{(m)}$.

Задачу об отыскании функции u будем называть второй краевой задачей.

Доказательство. Из теоремы 2 следует существование $u \in W_2^{(m)}$ такой, что

$$D(u, \xi) + \rho(\xi) = 0 \text{ при любой } \xi \in W_2^{(m)}. \quad (2)$$

Если выбрать $\xi \equiv 0$ в граничной полоске, то $D(u, \xi) = 0$. Отсюда следует существование непрерывных производных от u любого порядка в любой внутренней точке Ω (⁽¹⁾, стр. 118—120). Пусть ξ имеет непрерывные производные до порядка m и обращается в 0 на границе Ω .

Интегрируя по частям соотношение $D(u, \xi) = 0$, найдем $\int_{\Omega} \xi \Delta^m u \, d\Omega = 0$,

откуда, ввиду произвольности ξ , следует $\Delta^m u = 0$. Первое утверждение доказано. Второе следует непосредственно из (2).

Сформулированное обобщение второй краевой задачи примыкает к обобщению, данному в работе (2), исходя из метода ортогональных разложений, но в то же время позволяет указать условия разрешимости и характер единственности решения.

Выясним, каким граничным условиям в классическом смысле соответствует приведенная постановка (в предположении достаточной гладкости границы и рассматриваемых функций) в случае $m = 2$.

Утверждение 2) теоремы 3 может быть преобразовано к виду:

$$\int_S \xi A_1[u] \, dS + \int_S \frac{\partial \xi}{\partial n} A_2[u] \, dS = -\rho(\xi),$$

где n — внутренняя нормаль к S , а A_1 и A_2 — некоторые дифференциальные операторы, вид которых (трудно обозримый) устанавливается методом, данным в работе (⁽²⁾).

Полагая

$$-\rho(\xi) = \int_S \xi \varphi_1 \, dS + \int_S \frac{\partial \xi}{\partial n} \varphi_2 \, dS$$

и пользуясь независимостью ξ и $\partial \xi / \partial n$, получим:

$$A_1[u(S)] = \varphi_1(S), \quad A_2[u(S)] = \varphi_2(S),$$

причем φ_1 и φ_2 должны (для того, чтобы задача была разрешимой) удовлетворять условиям:

$$\int_S \varphi_1 \, dS = 0,$$

$$\int_S (x_i \varphi_1 + \cos n \, x_i \varphi_2) \, dS = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Покажем, что в случае $m = 1$ и достаточной гладкости всех входящих в задачу функций мы имеем обычную вторую краевую задачу.

Пусть $\rho(\xi) = -\int_S \varphi \xi \, dS$, где φ — заданная функция, удовлетворяющая условию: $\int_S \varphi \, dS = 0$. Тогда

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \, d\Omega = \int_S \varphi \xi \, dS.$$

Интегрируя по частям и учитывая $\Delta u = 0$, будем иметь:

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \varphi \right) \xi dS = 0.$$

Теорема 4. *Решение второй краевой задачи определяется с точностью до произвольного полинома $P^{(m-1)}(x)$.*

Доказательство немедленно следует из того, что разность двух решений, удовлетворяющих одному и тому же условию $D(u, \xi) = -\rho(\xi)$, $D(u_2, \xi) = -\rho(\xi)$, снова является решением и удовлетворяет условию

$$D(u, u) = 0.$$

Поступило
25 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Л. Соболев, Некоторые приложения функционального анализа к математической физике, 1950. ² М. И. Вишик, Матем. сборн., 25 (67), 2, 189 (1949).