

МАТЕМАТИКА

Е. А. ВОЛКОВ

**ОЦЕНКИ ОШИБКИ ПРИ РЕШЕНИИ МЕТОДОМ СЕТОК ЗАДАЧИ
ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 III 1954)

1. Впервые оценка погрешности при решении методом сеток задачи Дирихле была дана С. А. Гершгориным ^(1, 2). Оценка Гершгорина при решении внутренней задачи Дирихле в области G с простым сносом граничной функции на ступенчатый аппроксимирующий контур имеет выражение:

$$|u_h - u| < C_1 h M_1 + C_2 h^2 M_4, \quad (1)$$

где u — точное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа; u_h — приближенное решение; C_r ($r = 0, 1, 2, \dots$) — вполне определенные постоянные, не зависящие от шага сетки h и u ; M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — верхняя грань модулей i -х производных u в открытой области G . Коллатц ⁽³⁾ предложил для сноса граничной функции применять линейную интерполяцию и при предположении Гершгорина об ограниченности M_4 улучшил оценку (1):

$$|u_h - u| < C_3 h^2 M_2 + C_4 h^2 M_4.$$

Пользуясь методом мажорирования Гершгорина при предположении ограниченности M_3 , можно дать оценку погрешности в следующем виде:

$$|u_h - u| < C_3 h^2 M_2 + C_4 h M_3.$$

2. Метод Гершгорина имеет недостаток, так как при построении мажоранты для оценки $|u_h - u|$ существенно используется только максимум модуля по всей области погрешности разностной аппроксимации оператора Лапласа и никак не учитывается характер распределения этих погрешностей. Поэтому во многих случаях мажоранта дает весьма завышенные оценки или вообще не позволяет дать оценки.

При случайном распределении погрешностей при решении уравнения Лапласа методом сеток даны вероятностные оценки ошибки в работах ⁽⁴⁻⁷⁾, существенно использующих случайный характер распределения погрешностей и значительно улучшающих оценки, которые могут быть получены при помощи мажоранты Гершгорина.

3. Погрешность разностного оператора Δ_h

$$\Delta_h u_{ij} = u_{i-1, j} + u_{i+1, j} + u_{i, j-1} + u_{i, j+1} - 4u_{i, j}, \quad (2)$$

аппроксимирующего оператор Лапласа Δ , пропорциональна $h^4 \left(\frac{\partial^4 u(\xi_1, \eta_1)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(\xi_2, \eta_2)}{\partial y^4} \right)$, где точки (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) лежат в окрестности радиуса h

узла (i, j) . Если сделать предположение об ограниченности M_p или предположить, что $u \in H(p, A_p, \lambda)$ ⁽⁸⁾, можно доказать

$$\left| \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} \right| + \left| \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} \right| < \frac{C_p B_p}{R^{4-p-\lambda}} \quad (p < 4), \quad (3)$$

где R — расстояние от точки (x, y) до границы области Γ ; $B_p = M_p$ при $\lambda = 0$ и $B_p = A_p$ при $0 < \lambda \leq 1$. Таким образом, погрешности разностного оператора Δ_h могут существенно возрастать только в узлах, приближающихся к Γ .

Используя следующие обстоятельства: 1) количество операторов с максимальными погрешностями имеет порядок $1/h$; 2) погрешности операторов для узлов, расположенных вблизи границы, вообще влияют слабее на рост ошибки $|u_h - u|$, чем погрешности операторов для узлов, более удаленных от границы, — можно получить ряд оценок при более слабых предположениях, чем у Гершгорина.

4. В случае криволинейной границы Γ при $p = 1, 2, 3$ разностное уравнение для приближенного решения u_h составляется с применением интерполяции по Коллатцу для всех узлов, расположенных на расстоянии r_{ij} меньше чем $2h$ от Γ , а для остальных узлов записывается выражение (2), приравненное к нулю. Соответствующие оценки, выполненные при помощи разностного уравнения, рассмотренного С. Л. Соболевым ^(9, 10), и при помощи оценки разностной функции Грина ⁽⁵⁾, имеют следующее выражение:

$$|u_h - u| < C_3 (B_3 + M_2) h^2 \{ |\ln h|^2 + 1 \} \quad (p = 3);$$

$$|u_h - u| < C_p (B_p + M_p) h^{p-1+\lambda} \{ |\ln h|^{p-1} + 1 \} \quad (p = 1, 2).$$

5. При $p = 0, 1$ можно решать задачу Дирихле следующим способом. В узлы, расположенные на расстоянии порядка h^ν ($0 < \nu < 1$) от Γ , производится простой снос граничной функции, а для значений u_h в остальных узлах сетки составляется разностное уравнение при помощи оператора (2). При этом

$$|u_h - u| < C_1 (B_1 + M_1) h^{\frac{2}{3-\lambda}} \{ |\ln h| + 1 \} \quad \left(\nu = \frac{2}{3-\lambda} \right);$$

$$|u_h - u| < C_0 A_0 h^{\frac{2}{3}\lambda} \{ |\ln h| + 1 \} \quad \left(\nu = \frac{2}{3} \right).$$

6. Для выпуклых многоугольников со сторонами, параллельными осям прямоугольной системы координат и биссектрисам координатных углов, имеют место следующие леммы.

Лемма 1. Решение w^k ($k = 1, 2, \dots$) разностного уравнения

$$\Delta_h w_{ij}^k = \begin{cases} \alpha_{ij}^k, & h(k+1) \leq r_{ij} < (k+2)h; \\ 0, & 2h \leq r_{ij} < (k+1)h, \quad r_{ij} \geq (k+2)h; \end{cases}$$

$$\bar{\Delta}_h w_{ij}^k = 0, \quad 0 < r_{ij} < 2h$$

(где $\bar{\Delta}_h$ — оператор интерполяции по Коллатцу; α_{ij}^k — числа, $|\alpha_{ij}^k| \leq a_k$) при условии $w^k|_\Gamma = 0$ имеет оценку

$$|w_{ij}^k| \leq 20 k a_k.$$

Лемма 2. Решение в разностного уравнения

$$\Delta_h v_{ij} = 0, \quad r_{ij} \geq 2h;$$

$$\bar{\Delta}_h v_{ij} = \beta_{ij}, \quad 0 < r_{ij} < 2h$$

(где β_{ij} — числа, $|\beta_{ij}| < b$) при условии $v|_{\Gamma} = 0$ имеет оценку $|v_{ij}| \leq 4b$.

На основании лемм 1 и 2 и (3) при решении задачи Дирихле способом, изложенным в п. 4, в многоугольниках указанного вида выводятся следующие оценки:

$$|u_h - u| < C_3 (B_3 + M_3) h^2; \quad u_h - u < |C_2 (A_2 + M_2) h^2;$$

$$|u_h - u| < C_2 M_2 h^2 \{|\ln h| + 1\}; \quad |u_h - u| < C_1 B_1 h^{1+\lambda} \quad (\lambda < 1); \quad (4)$$

$$|u_h - u| < C_1 A_1 h^2 \{|\ln h| + 1\} \quad (\lambda = 1); \quad |u_h - u| < C_0 A_0 h^\lambda.$$

7. Теорема 1. Если $\Gamma \in \mathcal{L}_{k+1}(B, \lambda)$ ($k \geq 0$) и заданная на границе функция $f \in H(l, A, \lambda)$ ($0 \leq l \leq k+1$), то $u \in H(l, cA, \lambda')$ в G , где c — некоторая постоянная, $0 < \lambda' \leq 1$.

Теорема 1 доказывается в ⁽⁸⁾ и дает достаточные условия, при которых выполняются сделанные нами предположения об ограниченности M_p или $u \in H(p, A_p, \lambda)$ в случае криволинейной границы Γ .

В диссертации ⁽¹¹⁾ проведены оценки M_p ($p = 1, 2, 3, 4$) через уравнения Γ и f при условиях теоремы 1.

8. В трехмерном случае количество узлов сетки, расположенных около границы, имеет порядок $1/h^2$. Поэтому, если граница криволинейна, оценки, получаемые при помощи разностной функции Грина, ухудшаются. При $p \leq 2$ приходится прибегать к методу, изложенному в п. 5. Для областей, являющихся обобщением многоугольников, рассмотренных в п. 6, имеют место те же оценки (4).

Поступило
22 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. А. Гершгорин, Изв. Ленингр. политехн. инст., 30 (1927). ² S. A. Gerschgorin, ZAMM, 10, 373 (1930). ³ L. Collatz, ibid., 13, 56 (1933). ⁴ М. Р. Шура-Бура, ДАН, 78, № 1 (1951). ⁵ М. Р. Шура-Бура, Вычислит. матем. и вычислит. техн., 1 (1953). ⁶ А. А. Абрамов, там же, 1 (1953). ⁷ Л. А. Люстерник, Усп. матем. наук, 9, в. 2 (1954). ⁸ Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, 1953. ⁹ С. Л. Соболев, ДАН, 87, № 2 (1952). ¹⁰ С. Л. Соболев, ДАН, 87, № 3 (1952). ¹¹ Ш. Ш. Сутюшева, Диссертация, МГУ, 1951.