

А. Г. ВИТУШКИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВАРИАЦИЙ МНОЖЕСТВА И МЕТРИЧЕСКИЙ ЗАКОН ДВОЙСТВЕННОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 III 1954)

Заметка посвящена обобщению понятия вариаций функции двух переменных А. С. Кронрода. Ниже будут приведены два определения вариаций подмножеств евклидова пространства (§§ 1, 2, 3) и формулировка метрического закона двойственности (§ 4).

§ 1. Вспомогательные определения. Пусть E_n — n -мерное евклидово пространство; O — некоторая точка этого пространства; S_{n-1} — $n-1$ -мерная сфера единичного радиуса с центром в точке O . Определим понятие измеримого подмножества сферы S_{n-1} и меру $M_{n-1}(e)$ измеримого множества e из S_{n-1} .

Определение 1. Пусть B — борелевское подмножество сферы S_{n-1} .

Фиксируем подмножества e_i^k ($i=1, 2, \dots, l_k$; $k=1, 2, \dots$) сферы S_{n-1} , точки c_i^k ($i=1, 2, \dots, l_k$; $k=1, 2, \dots$) из S_{n-1} и положительные числа ε_k такие, что при всевозможных $i \neq j$ ($i < j \leq l_k$) пересечение $e_i^k e_j^k = 0$ ($k=1, 2, \dots$), каж-

дое из e_i^k есть борелевское множество и $\sum_{i=1}^{l_k} e_i^k = B$ ($k=1, 2, \dots$), для всякой пары точек a и b из $e_i^k + c_i^k$ расстояние* $\rho(a, b) \leq \varepsilon_k$ ($i=1, 2, \dots, l_k$; $k=1, 2, \dots$) и $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$. (1)

Обозначим через τ_i^k гиперплоскость пространства E_n , касающуюся S_{n-1} в точке c_i^k , через g_i^k — проекцию множества e_i^k на τ_i^k (ясно, что g_i^k есть борелевское множество, а следовательно, оно измеримо по Лебегу), а через μ_i^k — $n-1$ -кратную меру Лебега множества g_i^k ; можно

доказать, что последовательность чисел $\mu_k = \sum_{i=1}^{l_k} \mu_i^k$ ($k=1, 2, \dots$) имеет предел $\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$ при всевозможных e_i^k , c_i^k и ε_k , удовлетворяющих

условиям (1), а следовательно, от них не зависящий. Пусть e — произвольное подмножество сферы S_{n-1} . Нижнюю грань величины $\mu(B)$ для всевозможных борелевских множеств из S_{n-1} , содержащих как свое подмножество e , мы назовем внешней мерой $\mu(e)$ множества e . Аналогично, внутренней мерой $\underline{\mu}(e)$ множества e назовем верхнюю

* Расстояние в смысле метрики евклидова пространства.

грань величины $\mu(B)$ для всевозможных B -множеств, содержащихся в e . Если $\bar{\mu}(e) = \underline{\mu}(e)$, то скажем, что множество e измеримо, а величину $M_{n-1}(e) = \bar{\mu}(e) = \underline{\mu}(e)$ мы назовем мерой множества e . Нетрудно проверить, что для B -множеств мера $M_{n-1}(B)$ равна $\mu(B)$.

Лемма 1. Мера $M_{n-1}(e)$ является вполне аддитивной функцией множества e , т. е.:

- а) для всякого измеримого множества e $M_{n-1}(e) \geq 0$;
- б) если e_1 и e_2 измеримы и $e_2 \subset e_1$, то $e_1 - e_2$ измеримо и $M_{n-1}(e_1 - e_2) = M_{n-1}(e_1) - M_{n-1}(e_2)$;
- в) если e_k ($k = 1, 2, \dots$) суть измеримые попарно не пересекающиеся подмножества S_{n-1} , то $e = \sum_{k=1}^{\infty} e_k$ измеримо и $M_{n-1}(e) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} M_{n-1}(e_k).$$

После определения 1 и леммы 1 мы можем говорить об измеримости (по Лебегу) функций, определенных на S_{n-1} , и об их интеграле Лебега.

Обозначения. Обозначим через Ψ_k^n пространство k -мерных плоскостей (k -мерных подпространств) из E_n , содержащих точку O , а через R_k^n — пространство упорядоченных систем $r_k^n = (\vec{\rho}_1^n, \dots, \vec{\rho}_k^n)$, состоящих из k попарно ортогональных единичных векторов $\vec{\rho}_1^n, \vec{\rho}_2^n, \dots, \vec{\rho}_k^n$, имеющих своим началом точку O (топология в пространствах Ψ_k^n и R_k^n определяется естественным образом топологией евклидова пространства).

Далее при помощи индукции (по числу k) определим понятие измеримого подмножества R_k^n и меру M_k^n измеримых подмножеств.

Определение 2. Пусть ω_1 — подмножество R_1^n , а ω'_1 — множество концов всевозможных векторов $r_1^n = \vec{\rho}_1^n$, содержащихся в ω'_1 . Ясно, что ω'_1 есть подмножество S_{n-1} , а поэтому естественно условиться, что ω_1 измеримо тогда и только тогда, когда измеримо (в смысле определения 1) множество ω'_1 , а за меру $M_1^n(\omega)$ множества ω_1 принять величину $M_{n-1}(\omega'_1)$ (см. определение 1). Предположим, что понятие измеримого множества и его меры определены для подмножеств пространства R_l^n ($l = 1, 2, \dots, k-1$; n — произвольное целое положительное число).

Пусть ω_k есть подмножество R_k^n ; r_{k-1}^n — точка из R_{k-1}^n ; $\omega_k(r_{k-1}^n)$ — множество всех таких точек $r_k^n = (\vec{\rho}_1^n, \dots, \vec{\rho}_k^n)$ из ω_k , первые $k-1$ компонент (векторов) $\vec{\rho}_1^n, \dots, \vec{\rho}_{k-1}^n$ каждой из которых являются составляющими компонентами точки r_{k-1}^n из R_{k-1}^n . $\omega'_k(r_{k-1}^n)$ — множества концов k -х векторов (компонент) $\vec{\rho}_k^n$ от всех точек множества $\omega_k(r_{k-1}^n)$. Ясно, что $\omega'_k(r_{k-1}^n)$ есть подмножество пространства R_1^{n-k} , а тогда понятие его измеримости и величина $M_1^{n-k}[\omega_k(r_{k-1}^n)]$ его меры (в случае, если оно измеримо) по предположению индукции уже определены. Множество ω_k называется измеримым, если, во-первых, почти для всякой точки r_{k-1}^n из R_{k-1}^n (в смысле меры M_{k-1}^n) соответствующее точке r_{k-1}^n множество $\omega'_k(r_{k-1}^n)$ является измеримым подмножеством пространства R_1^{n-k} , и, во-вторых, функция $M_1^{n-k}[\omega'_k(r_{k-1}^n)]$ (как функция точки r_{k-1}^n) измерима по Лебегу. За меру $M_k^n(\omega_k)$ множества ω_k примем

величину

$$M_k^n = M_k^n(\omega_k) = \int_{R_{k-1}^n} M_1^{n-k} [\omega_k'(r_{k-1}^n)] dM_{k-1}^n.$$

Обозначим через χ отображение R_k^n на Ψ_k^n , которое точке $r_k^n = (\vec{p}_1^n, \dots, \vec{p}_k^n)$ из R_k^n ставит в соответствие k -мерное подпространство пространства E_n (точку из Ψ_k^n), натянутое на векторы $\vec{p}_1^n, \dots, \vec{p}_k^n$.

Определение 3. Пусть γ есть подмножество пространства Ψ_k^n . γ называется измеримым множеством, если его прообраз $\chi^*(\gamma)$ в R_k^n при отображении χ является измеримым подмножеством R_k^n . Пусть γ измеримо. Величину $\mu_k^n(\gamma) = M_k^n[\chi^*(\gamma)]$ назовем мерой множества γ . Можно доказать, что для $\mu_k^n(\gamma)$ имеет место утверждение леммы 1.

§ 2. Индуктивное определение вариаций. При помощи двойной индукции определим понятие измеримого (V_k^n) множества из E_n и величину k -кратной вариации измеримого (V_k^n) множества ($k = 0, 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, 3, \dots$).

Определение 4. Нулевой или нуль-кратной вариацией $V_0^n = V_0^n(\mathcal{E})$ множества $\mathcal{E}$ называется число компонент этого множества. Так как $V_0^n(\mathcal{E})$ определена для всякого множества $\mathcal{E}$, то естественно условиться, что всякое множество измеримо (V_0^n). Предположим, что для произвольного n и $l < k \leq n$ понятие измеримого (V_l^n) подмножества пространства E_n и величина l -кратной вариации $V_l^n = V_l^n(\mathcal{E})$ измеримого множества $\mathcal{E}$ уже определены ($n = 1, 2, \dots; l = 0, \dots, k-1$). Пусть $\mathcal{E}$ есть произвольное подмножество E_n ; O — некоторая точка из E_n ; S_{n-1} — сфера единичного радиуса с центром в точке O ($C_n = M_{n-1}(S_{n-1})$); q — произвольная точка из S_{n-1} ; $\lambda(q)$ — направленная прямая из E_n , содержащая точки O и q (за положительное направление $\lambda(q)$ принимается направление вектора $\vec{Oq}$); x — координата произвольной точки из $\lambda(q)$ относительно вектора $\vec{Oq}$; $E_{n-1}(q, x)$ — гиперплоскость пространства E_n , ортогональная к $\lambda(q)$, содержащая точку из $\lambda(q)$ с координатой x ; $\mathcal{E}(q, x)$ — пересечение множества $\mathcal{E}$ с $E_{n-1}(q, x)$.

Множество $\mathcal{E}$ называется измеримым (V_k^n), если, во-первых, почти для всякой точки q из S_{n-1} (в смысле определения 1) $\lambda(q)$ такова, что почти для всякого x соответствующее множество $\mathcal{E}(q, x)$ измеримо (V_{k-1}^{n-1}) и функция $V_{k-1}^{n-1}[\mathcal{E}(q, x)]$ как функция от x при фиксированном q измерима по Лебегу, и, во-вторых, величина $V_k^n(\mathcal{E}, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_{k-1}^{n-1}[\mathcal{E}(q, x)] dx$ как функция точки q также измерима по Лебегу.

Пусть $\mathcal{E}$ измеримо (V_k^n). Величину

$$V_k^n(\mathcal{E}) = \frac{1}{C_n} \int_{S_{n-1}} V_k^n(\mathcal{E}, q) dM_{n-1}$$

назовем k -кратной вариацией множества $\mathcal{E}$ в пространстве E_n , или просто k -кратной вариацией множества $\mathcal{E}$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Для полной корректности определения следует заметить, что $V_k^n(\mathcal{E})$ не зависит от выбора O .

Теорема 1. Всякое замкнутое подмножество пространства E_n измеримо (V_k^n) ($k = 0, 1, \dots, n; n = 1, 2, 3, \dots$).

§ 3. Конструктивное определение вариаций. Пусть ε есть подмножество E_n ; τ_k — k -мерная плоскость на E_n , содержащая точку O ; p — произвольная точка из τ_k ; $E_{n-k}(p)$ — $(n-k)$ -мерная плоскость из E_n , содержащая точку p из τ_k и ортогональная к τ_k ; $\Xi_k(p) = \Xi_k^{\tau_k}(p)$ — число компонент пересечения ε с плоскостью $E_{n-k}(p)$.

Определение 5. Мы скажем, что множество ε измеримо (V_k) , если, во-первых, почти для всякой плоскости τ_k на Ψ_k^n (см. обозначения § 1) соответствующая функция $\Xi_k^{\tau_k}(p)$ (τ_k фиксировано) измерима по Лебегу, и, во-вторых, величина $V_k(\varepsilon, \tau_k) = \int_{\tau_k} \Xi_k^{\tau_k}(p) dp$ как функция τ_k измерима по Лебегу. Пусть ε измеримо

(V_k) . Величина $V_k(\varepsilon) = \frac{1}{C_n C_{n-1} \dots C_{n-k+1}} \int_{\Psi_k^n} V_k(\tau_k, \varepsilon) d\mu_k^n$ называется

вариацией порядка k множества ε ($k=0, 1, \dots, n$; $n=1, 2, \dots$).

Теорема 2. Всякое замкнутое подмножество пространства E_n измеримо (V_k) ($k=0, 1, 2, \dots, n$; $n=1, 2, 3, \dots$).

Теорема 3. Пусть ε является измеримым (V_k^n) и измеримым (V_k) подмножеством пространства E_n . Тогда k -кратная вариация и вариация порядка k множества ε численно равны ($k=0, 1, 2, \dots, n$).

Теорема 4. Вариации $V_k = V_k^n$ ($k=0, 1, \dots, n$) независимы в том смысле, что для произвольных положительных величин $a_k \leq +\infty$ ($k=0, 1, \dots, n$; $a_n < +\infty$; a_0 — целое число) в E_n найдется ограниченное замкнутое множество ε такое, что $V_k(\varepsilon) = a_k$ ($k=0, 1, \dots, n$).

§ 4. Метрический закон двойственности. Вариации, в отличие от прочих известных метрических характеристик множества, интересны тем, что в терминах вариации можно сформулировать закон двойственности, т. е., зная вариации множества, мы можем высказать нечто существенное о метрическом строении дополнения к этому множеству.

Теорема 5. Пусть ε измеримо (V_k^n) множество, лежащее в n -мерном замкнутом кубе Y_n со стороной длины $a \leq 1$, и $V_k^n(\varepsilon) = 0$ ($k = \nu + 1, \dots, n$; $\nu < n$). Тогда в $Y_n - \varepsilon = S\varepsilon$ существует n -мерный замкнутый куб со стороной длины $d \geq \frac{A(n, \nu)}{\sqrt[n]{1 + \sum_{k=0}^{\nu} V_k^n(\varepsilon)}} a^{\frac{n}{n-\nu}}$, ребра

которого параллельны ребрам Y_n и при этом $A(n, \nu) = 1/2^{\nu} \sqrt[n]{\frac{\nu}{n-\nu}}$.

Поступило
24 III 1954