

МАТЕМАТИКА

Н. И. АХИЕЗЕР

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ
И ТЕОРЕМЫ ВИНЕР — ПАЛЕЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 10 IV 1954)

Обобщения, которым посвящена настоящая статья, связаны с переходом от пространства L^2 к пространству L^2_φ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \frac{dx}{\varphi(x)},$$

где вес $\varphi(x) \geq 1$ ($\varphi(0) = 1$) есть целая трансцендентная функция (коротко ц. т. ф.) нулевого рода, все корни которой лежат в некоторой полосе $-A < \Re z < A$ конечной ширины.

Очевидно, что $\varphi(x)$ представима в виде $\varphi(x) = |\omega(x)|^2$ ($-\infty < x < \infty$), где

$$\omega(z) = \prod_1 \left(1 - \frac{z}{c_k}\right), \quad \sum_1 \frac{1}{|c_k|} < \infty, \quad \Im c_k > 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Пространству L^2_φ принадлежат все многочлены. Однако их совокупность не плотна в нем. Пусть $\{P_k(x)\}_0^\infty$ есть полная последовательность ортогональных и нормированных многочленов в L^2_φ . В таком случае каждой функции $f(x) \in L^2_\varphi$ принадлежит ряд $\sum_0^\infty a_k P_k(z)$, где $a_k = (f, P_k)$, который в каждой конечной части плоскости сходится абсолютно и равномерно и представляет ц. т. ф. нулевой степени.

Теорема 1. Всякая функция $f(x) \in L^2_\varphi$ однозначно представима в виде

$$f(x) = \sum_0^\infty a_k P_k(x) + \frac{\omega(x)}{V_{2\pi}} \int_0^\infty e^{itx} h(t) dt + \frac{\overline{\omega(x)}}{V_{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{itx} h(t) dt, \quad (1)$$

где $\sum_0^\infty |a_k|^2 < \infty$, $h(t) \in L^2$ и интегралы справа понимаются как л. и. м. При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \frac{dx}{\varphi(x)} = \sum_0^\infty |a_k|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt. \quad (2)$$

Обратно, всякая функция $f(x)$, представляемая указанным образом в виде (1), где $\sum_0^\infty |a_k|^2 < \infty$ и $h(t) \in L^2$, принадлежит L^2_φ .

Доказательство. Если $f(x) \in L^2_\varphi$ и $a_k = (f, P_k)$, то функция $F(x) = f(x) - \sum_0^\infty a_k P_k(x)$ также принадлежит L^2_φ и, кроме того, равны нулю все ее моменты

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \frac{x^k}{\varphi(x)} dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Так как $F(x)/\varphi(x)$ продолжает оставаться в L^2 после умножения на $\sqrt{\varphi(x)}$, то

$$\frac{F(x)}{\omega(x)\overline{\omega(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Phi(t) dt, \quad (4)$$

где $\Phi(t)$ имеет производные всех порядков и вместе со всеми ими принадлежит L^2 . Мало того, в L^2 входит каждая из функций

$$\overline{\omega(x)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} A(t) dt, \quad \omega(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} B(t) dt,$$

и, значит, $A(t) = \overline{\omega(iD)} \Phi(t)$, $B(t) = \omega(iD) \Phi(t)$, где D — оператор дифференцирования в L^2 .

Полагая

$$\psi_+(t) = \begin{cases} \psi(t) & (t \geq 0), \\ 0 & (t < 0); \end{cases} \quad \psi_-(t) = \psi(t) - \psi_+(t),$$

покажем, что областям операторов $\overline{\omega(iD)}$, $\omega(iD)$ принадлежат также функции $\Phi_+(t)$, $\Phi_-(t)$ и что

$$\overline{\omega(iD)} \Phi_+(t) = A_+(t), \quad \omega(iD) \Phi_-(t) = B_-(t).$$

Так как из равенства нулю всех моментов (3) следует, что $\Phi^{(k)}(0) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то наше утверждение не нуждалось бы в доказательстве, если бы $\omega(iD)$ был дифференциальным оператором конечного порядка. Для рассматриваемого оператора $\omega(iD)$ оно вытекает из того, что

$$\omega(iD) \Phi(t) = \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} \omega_n(iD) \Phi(t), \quad \omega_n(z) = \prod_1^n \left(1 - \frac{z}{c_k}\right),$$

поскольку $|\omega_n(x)| \leq |\omega(x)|$ при $x \geq 2A$ и $x \leq -2A$, и, значит, при $T \geq 2A$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega(x) - \omega_n(x)|^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Phi(t) dt \right|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(x)|^2}{|\omega(x)|^2} \left| 1 - \frac{\omega_n(x)}{\omega(x)} \right|^2 dx \leq \\ &\leq \int_{-T}^T \frac{|F(x)|^2}{|\omega(x)|^2} \left| 1 - \frac{\omega_n(x)}{\omega(x)} \right|^2 dx + 4 \int_T^\infty \frac{|F(x)|^2}{|\omega(x)|^2} dx + 4 \int_{-\infty}^{-T} \frac{|F(x)|^2}{|\omega(x)|^2} dx. \end{aligned}$$

Представление (1), таким образом, доказано, так как равенство (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} F(x) &= \omega(x) \frac{\bar{\omega}(x)}{V 2\pi} \int_0^{\infty} e^{itx} \Phi(t) dt + \bar{\omega}(x) \frac{\omega(x)}{V 2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{itx} \Phi(t) dt = \\ &= \frac{\omega(x)}{V 2\pi} \int_0^{\infty} e^{itx} A(t) dt + \frac{\bar{\omega}(x)}{V 2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{itx} B(t) dt. \end{aligned}$$

Что касается равенства (2), то оно вытекает из (1), так как

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(x)}{\omega(x)} dx \int_0^{\infty} \overline{h(s)} e^{-isx} ds \int_{-\infty}^0 h(t) e^{itx} dt = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(x)}{\omega(x)} \frac{dx}{(1 + i\alpha x)^2} \int_0^{\infty} \overline{h(s)} e^{-isx} ds \int_{-\infty}^0 h(t) e^{itx} dt = 0. \end{aligned}$$

Теорема 2. Целая трансцендентная функция $f(z)$ степени σ тогда и только тогда принадлежит L_{Φ}^2 на вещественной оси, если она допускает представление

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_k P_k(z) + \frac{\omega(z)}{V 2\pi} \int_0^{\sigma} e^{itz} h(t) dt + \frac{\bar{\omega}(z)}{V 2\pi} \int_{-\sigma}^0 e^{itz} h(t) dt,$$

где

$$\sum_0^{\infty} |a_k|^2 < \infty, \quad \int_{-\sigma}^{\sigma} |h(t)|^2 dt < \infty.$$

Доказательство. Надлежит доказать, что в силу дополнительного условия о функции $f(x)$ в представлении (1) $h(t) = 0$ почти всюду при $t > \sigma$ и $t < -\sigma$. Чтобы доказать это равенство при $t > \sigma$, перепишем (1) в виде

$$\begin{aligned} &\frac{e^{-i\sigma z} G(z)}{(z-i)^2 \omega(z)} - \frac{1}{V 2\pi} \frac{\bar{\omega}(z)}{(z-i)^2 \omega(z)} \int_{-\infty}^{-\sigma} e^{isz} h(s+\sigma) ds = \\ &= \frac{1}{V 2\pi} \frac{1}{(z-i)^2} \int_0^{\infty} e^{isz} h(s+\sigma) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

где z вещественно, а

$$G(z) = f(z) - \sum_0^{\infty} a_k P_k(z) - \frac{\omega(z)}{V 2\pi} \int_0^{\sigma} e^{itz} h(t) dt$$

есть ц. т. ф. степени $\leq \sigma$, принадлежащая L_{Φ}^2 на вещественной оси.

Наше утверждение будет доказано, если мы установим, что для любого z из полуплоскости $\Im z \leq 0$ имеет место неравенство

$$|G(z) e^{-i\sigma z}| \leq C |(z-i) \omega(z)|, \quad (6)$$

где C — какая-нибудь постоянная. Действительно, в силу (6) будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(x+iy)|^2 dx < B \quad (y \leq 0), \quad (7)$$

где $H(z)$ есть первый член левой части равенства (5), а B от y не зависит. Второй член левой части равенства (5) регулярен в полу-

плоскости $\Im z \leq 0$ и удовлетворяет в ней также неравенству типа (7). Поэтому левая часть равенства (5) для вещественных z представляема в виде

$$\frac{1}{V 2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{isz} \psi(s) ds, \quad \int_{-\infty}^0 |\psi(s)|^2 ds < \infty,$$

а само равенство (5) приводит к соотношению

$$(z-i)^2 \int_{-\infty}^0 e^{isz} \psi(s) ds = \int_0^{\infty} e^{isz} h(s+\sigma) ds,$$

которое для всех вещественных z может иметь место лишь если $h(s+\sigma) = 0$ при $s > 0$.

Чтобы доказать неравенство (6), заметим, что $\varphi(x)$ есть возрастающая функция в интервале (A, ∞) . Поэтому при $x > A$

$$\left| \int_A^x G(x) dx \right| = \left| \int_A^x \frac{G(t)}{V \varphi(t)} V \varphi(t) dt \right| = V \varphi(t) V x-A \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(x)|^2}{\varphi(x)} dx}.$$

Этим путем устанавливается, что при некоторой константе B

$$\left| \int_0^x G(x) dx \right| \leq B |(x-i) \omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty). \quad (8)$$

Но $\int_0^z G(z) dz$ есть ц. т. ф. степени $\leq \sigma$. Поэтому из соотношения (8), справедливого на всей числовой оси в силу одного из обобщений известного неравенства С. Н. Бернштейна ⁽¹⁾ (здесь достаточно обобщение, указанное в ⁽²⁾), следует, что на всей оси $-\infty < x < \infty$

$$\begin{aligned} |G(x)| &\leq B |\{\omega(x)(x-i)e^{i\sigma x}\}'| = \\ &= B \left| (x-i) \omega(x) \left\{ i\sigma + \frac{1}{x-i} + \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} \right\} \right| \leq C |(x-i) \omega(x)|, \end{aligned}$$

где $C \leq B \left\{ \sigma + 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{|c_k|} \right\}$. Из полученного неравенства в силу обобщения ⁽²⁾ другой теоремы С. Н. Бернштейна ⁽¹⁾ и вытекает неравенство (6) всюду в полуплоскости $\Im z \leq 0$.

При помощи теорем 1 и 2 дается расщепление функции из L_{φ}^2 на две компоненты, каждая из которых также принадлежит L_{φ}^2 и представляет предельные значения на вещественной оси функции, регулярной в одной из полуплоскостей. В этом отношении статья имеет точки соприкосновения с известной работой Карлемана ⁽³⁾, а также некоторыми исследованиями Кобера ⁽⁴⁾.

Поступило
10 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, М.—Л., 1937.
² Н. И. Ахиезер, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, 411 (1946). ³ S. Carleman, L'intégrale de Fourier, Uppsala, 1944, chap. II. ⁴ H. Kober, Am. J. of Math., 68, No. 3, 398 (1946).