

МАТЕМАТИКА

Академик П. С. АЛЕКСАНДРОВ

О НЕКОТОРЫХ СЛЕДСТВИЯХ ВТОРОГО ЗАКОНА
ДВОЙСТВЕННОСТИ СИТНИКОВА

1. Эта заметка примыкает к напечатанной в этом же выпуске «Докладов» заметке К. Ситникова «Новые соотношения двойственности для незамкнутых множеств» и пользуется введенными там обозначениями ⁽⁵⁾ *.

Второй закон двойственности Ситникова может быть записан в виде изоморфизма

$$\Delta_c^p A = \nabla^q B - N_{\nabla}^q B \quad (1)$$

и в виде двойственности зацепления

$$\Delta_c^p (A, \mathfrak{A}) | \bar{\delta}^q (B, \mathfrak{B}). \quad (2)$$

Бикомпактную группу Δ -типа, основанную на покрытиях, долго не удавалось найти; ситниковская группа $\bar{\delta}^q$, заполняя, наконец, этот пробел, в частности позволяет сразу ответить на некоторые вопросы, поставленные в моей работе ⁽¹⁾. Это и делается в настоящей заметке.

2. Наряду с ситниковской двойственностью (2) мы имеем доказанную мною в ⁽¹⁾ двойственность

$$\delta^p (A, \mathfrak{A}) | \bar{\Delta}^q (B, \mathfrak{B}), \quad (3)$$

где δ^p есть дискретная, так называемая проекционная или «скользящая» группа, т. е. алгебраический предел обратного спектра основанных на конечных цепях Δ -групп покрытий множества A , а группа $\bar{\Delta}^q$ есть бикомпактное пополнение фактор-группы $\Delta_c^q (B, \mathfrak{B}) - N_{\Delta}^q (B, \mathfrak{B})$, где подгруппа N_{Δ}^q (группа незацепляемости) состоит из классов компактных циклов множества B , имеющих нулевой коэффициент зацепления со всяким скользящим циклом множества A .

В моей работе ⁽¹⁾ (п. 5:3, стр. 200—210) исследован «основной гомоморфизм» h группы $\Delta_c^p A$ в $\delta^p A$ —это естественный гомоморфизм, вытекающий из того, что каждый компактный цикл множества A может быть рассматриваем как скользящий (проекционный). Образ группы $\Delta_c^p A$ при этом гомоморфизме есть подгруппа $C^p (A, \mathfrak{A})$ группы $\delta^p A$, состоящая из тех скользящих гомологических классов, которые содержат компактные циклы. Ядро гомоморфизма h есть подгруппа $\Delta_!^p (A, \mathfrak{A})$ группы $\Delta_c^p A$, состоящая из гомологических классов тех компактных циклов, которые гомологичны нулю во всякой окрестности множества A или, что то же самое, имеют нулевой коэф-

* В частности, A и B —произвольные взаимно дополнительные множества в n -мерном сферическом пространстве S^n ; $p + q = n - 1$; из двух двойственных между собою в смысле Понтрягина групп $\mathfrak{A} | \mathfrak{B}$ группа $\mathfrak{A}$ —дискретна, группа $\mathfrak{B}$ —бикомпактна.

Все рассматриваемые нами покрытия суть открытые, звездно-конечные покрытия.

фициент зацепления со всяким компактным циклом множества A , группа $\Delta_1^p A$ названа в ⁽¹⁾ «увеличенной группой незацепляемости».

Е. Ф. Мищенко ⁽²⁾ на простом примере показал, что группа $C^p A$ может быть собственной подгруппой группы $\delta^p A$ и что, следовательно, «скользящий нарост» $\mathfrak{M}^p A = \delta^p A - C^p A$ может быть отличен от нуля.

В моей работе ⁽¹⁾ ставится вопрос, являются ли группы $\Delta_1^p A, C^p A$ и $\mathfrak{M}^p A$ дуализируемыми, т. е. выражаются ли они через топологические инварианты множества B .

Для групп $\Delta_1^p A$ и $C^p A$ это выводится из ситниковских изоморфизмов: для группы $\Delta_1^p A$ — непосредственно, так как

$$\Delta_1^p(A, \mathfrak{A}) = N_{\Delta c}^p(A, \mathfrak{A}) - H^p(A, \mathfrak{A});$$

для группы $C^p A$ — посредством следующего замечания. Совершенно аналогично гомоморфизму h определяется естественный гомоморфизм — назовем его h_s — группы $\Delta^p A$ в группу $\delta^p A$. Ядром этого гомоморфизма является группа $N_{\Delta c}^p A$, а образом группы $\Delta^p A$ при гомоморфизме h_s оказывается, как легко видеть, та же группа $C^p A$. Следовательно,

$$C^p A = \Delta^p A - N_{\Delta c}^p A,$$

а так как по первому закону двойственности Ситникова мы имеем изоморфизм между группами $\Delta^p A$ и $\nabla^q B$, переводящий группу $N_{\Delta c}^p A$ в группу $N_{\nabla c}^q B$, то

$$C^p A = \nabla_B^q B - N_{\nabla c}^q B,$$

что и требовалось доказать.

3. Мы выведем дуализируемость всех трех групп $\mathfrak{M}^p A, \Delta_1^p A, C^p A$ сразу из следующего более общего утверждения:

Все свойства множества A , допускающие выражение в виде свойств основного гомоморфизма h , являются дуализируемыми.

Этот факт представляется мне одним из важнейших следствий совокупности двух двойственностей (2) и (3). Он вытекает просто из того, что к гомоморфизму h группы $\Delta_c^p A$ в группу $\delta^p A$ имеется сопряженный гомоморфизм $\bar{h}$ группы $\Delta^q B$ в группу $\bar{\delta}^q B$. Чтобы понять, в чем заключается этот гомоморфизм и через какие именно инварианты множества B можно при его помощи выразить группы $\mathfrak{M}^p A, C^p A$ и $\Delta_1^p A$, выпишем из моей работы ⁽³⁾ общую схему сопряженных гомоморфизмов, которая в данном случае принимает вид

$$h \left\{ \begin{array}{l} \Delta_c^p A \supseteq \Delta_1^p A \perp Y^q B \subseteq \bar{\delta}^q B \\ \delta^p A \supseteq C^p A \perp X^q B \subseteq \bar{\Delta}^q B \end{array} \right. \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \bar{h} \\ \downarrow \end{array} \quad (4)$$

(слева — область коэффициентов $\mathfrak{A}$, справа — $\mathfrak{B}$); здесь знак $\perp$ означает аннуляцию, а диагональная черта — двойственность $C^p A | Y^q B$; группа $Y^q B$ есть образ группы $\bar{\Delta}^q B$, а группа $X^q B$ — ядро гомоморфизма $\bar{h}$. Этот гомоморфизм имеет естественный смысл некоторого гомоморфизма вложения, который можно легко получить непосредственно, пользуясь данным выше определением групп $\bar{\delta}^q$ и $\bar{\Delta}^q$, но который делается особенно наглядным, если несколько преобразовать определение группы $\bar{\delta}^q$. Именно, можно доказать, что группа $\bar{\delta}^q(B, \mathfrak{B})$ находится в отношении естественного изоморфизма с предельной

группой $\bar{D}^q(B, \mathfrak{B})$ обратного спектра

$$\{\bar{\Delta}^q(\mu, \mathfrak{B}); E_\mu^{\mu'}\},$$

где μ — упорядоченные по включению окрестности множества B , а $E_\mu^{\mu'}$ — гомоморфизмы вложения. Изоморфизм $\bar{\delta}^q B = \bar{D}^q B$ основывается на рассмотрении канонических покрытий и канонических окрестностей (см. (1), § 3); единственный нетривиальный момент в его доказательстве заключается в установлении того, что факторизации по незацепляемым циклам (при переходе от $\Delta_c^q \mu$ к $\bar{\Delta}_c^q \mu$) и факторизация по циклам нерва α , имеющим нулевое скалярное произведение со всяким ∇ -циклом этого нерва, оказываются при переходе к предельным группам эквивалентными. Это основывается на лемме четвертой главы работы Ситникова (4).

Группа $\bar{D}^q$ является «скользящим» эквивалентом группы $\bar{\delta}^q$, подчеркивающим аналогию между δ^q и $\bar{\delta}^q$. Но при замене группы $\bar{\delta}^q$ группой $\bar{D}^q$ гомоморфизм $\bar{h}^q$, сопряженный гомоморфизму h , очевидным образом превращается в гомоморфизм вложения группы $\bar{\Delta}^q B$ в $\bar{D}^q B$.

4. Дуализируемость группы $\mathfrak{M}^p A$ выражается в таблице (4) двойственностью

$$\mathfrak{M}^p A | X^q B. \quad (5)$$

Заметим, что из дуализируемости группы $\Delta_c^p A$ вытекает дуализируемость введенного в моей работе (1) условия (r^p) , заключающегося в том, чтобы всякий компактный цикл z^p множества A , гомологичный нулю во всех окрестностях этого множества, был компактно гомологичен нулю и в самом A ; это условие, очевидно, эквивалентно требованию, чтобы гомоморфизм h был изоморфизмом (на множестве B условию (r^p) , таким образом, соответствует условию, чтобы $Y^q B = \bar{\delta}^q B$).

5. Рассмотрение гомоморфизма $\bar{h}$ естественно приводит на множестве B к группам, совершенно аналогичным группам $\mathfrak{M}^p A$, и эти группы, как все вообще свойства, выражаемые через свойства гомоморфизма $\bar{h}$, оказываются дуализируемыми.

6. Некоторые нерешенные вопросы. В связи с изложенным, а главное после того, как найдена группа $\bar{\delta}^q B$, выясняющая геометрический смысл группы характеров группы $\Delta_c^p A$, особый интерес приобретает вопрос о геометрическом смысле группы характеров группы $\nabla^p A$; тесно связан с этим вопросом и вопрос о существовании двойственности зацепления, эквивалентной первому закону двойственности Ситникова.

Далее, в связи со сказанным в конце § 3, следует отметить, что дуализируемость свойств (a^p) и (ur^p) моей работы (1), а вместе с тем и дуализируемость простого и естественного класса гомологических ретрактов, остается недоказанной.

Наконец, вопрос об устойчивости при ретрагирующих деформациях групп, участвующих в тех или иных теоремах двойственности, решен в положительном смысле лишь для первого закона двойственности Ситникова (см. гл. 3 его работы (4)). Этот вопрос остается открытым не только для двойственности (2) — устойчивость групп $\bar{\delta}$, но и для двойственности (3) — устойчивость групп δ .

Поступило
17 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Александров, Матем. сборн., 21 (63): 2, 161 (1947). ² Е. Ф. Мищенко, Матем. сборн., 32 (74): 1, 219 (1953). ³ П. Александров, Изв. АН СССР, сер. матем., 6, в. 5 (1942). ⁴ К. Ситников, Матем. сборн., 34 (76): 1, 3 (1954). ⁵ К. Ситников, ДАН, 96, № 5 (1954).