

Академик Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ТЕЧЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА — ТРИКОМИ

Рассмотрим отражение слабого разрыва (разрыв первых производных скорости по координатам) от звуковой линии. Точку их пересечения выбираем в качестве начала координат x, y , а ось x — вдоль направления скорости в этой точке; тогда ей соответствует начало координат и в плоскости годографа η, θ *. Пусть падающему разрыву соответствует в плоскости годографа характеристика Oa (см. рис. 1). Непрерывность координат x, y на разрыве означает непрерывность первых производных Φ_η, Φ_θ . Напротив, вторые производные от $\Phi(\eta, \theta)$ выражаются через первые производные скорости по координатам и потому должны испытывать разрыв. Сами же функции Φ в областях 1 и 2 по обе стороны характеристики Oa не должны иметь на ней никаких особенностей. Такое решение уравнения Эйлера — Трикоми $\Phi_{\eta\eta} - \eta\Phi_{\theta\theta} = 0$ имеет вид

$$\Phi = -A\eta\theta - B\theta^{11/12}\zeta^2 F\left(\frac{13}{12}, \frac{19}{12}, 3; \zeta\right) \quad (1)$$

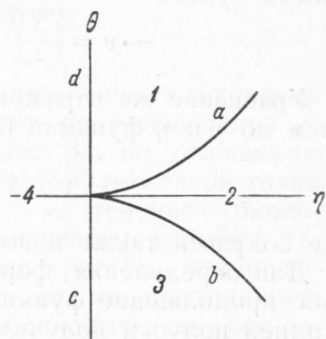


Рис. 1

в области 1, и такой же вид с другой постоянной C вместо B — в области 2. Первый член здесь есть наиболее низкое по степеням θ и η частное решение, не приводящее ни к каким особенностям течения в физической плоскости (ср. (1), § 111). Второй же член приводит к скачку вторых производных по Φ при непрерывных первых (это есть второй член в (1) (110,6) с $k = 11/12$). В (1) введено обозначение $\zeta = 1 - (4\eta^3/9\theta^2)$.

Отраженному от звуковой линии разрыву соответствует вторая характеристика (Ob). Вид функции Φ вблизи нее устанавливается путем аналитического продолжения функций (1) согласно формулам (1) (110, 11—13) (в которых надо при этом положить $k = 11/12 + \varepsilon$, после чего стремить ε к нулю). В результате вычисления для функции Φ в области 4 вблизи характеристики Ob получается следующее выражение, в котором сохранены члены вплоть до порядка ζ^2 включительно:

$$\begin{aligned} \Phi = & -A\theta\eta + \frac{B}{\pi}(-\theta)^{11/12}\left\{\zeta^2 \ln|\zeta| - \frac{2^9 \cdot 3^4}{385} + \frac{288}{7}\zeta + \right. \\ & \left. + \left[2\gamma - 2\ln 2 + \frac{2781}{770} + \psi\left(\frac{17}{6}\right) + \psi\left(\frac{13}{6}\right)\right]\right\} = \\ = & -A\theta\eta + \frac{B}{\pi}(-\theta)^{11/12}\left\{\zeta^2 \ln|\zeta| - 108 + 41,1\zeta + 4,86\zeta^2\right\} \quad (2) \end{aligned}$$

* Обозначения те же, что в (1), §§ 110, 111.

($\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, γ — постоянная Эйлера). Аналогичное преобразование функции Φ в области I от окрестности Oa к окрестности Ob дает такое же выражение (2) с $C/2$ вместо B . Условие непрерывности координат x, y на отраженном разрыве приводит, следовательно, к соотношению $C = 2B$.

Условие положительности якобиана $\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \eta)}$ автоматически выполняется вблизи Oa (где $\Delta \cong A^2$), а вблизи Ob вычисление при помощи (2) дает

$$\Delta \cong -\frac{16}{\pi} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} AB\eta^{1/2} \ln|\zeta|.$$

При приближении к Ob $\ln|\zeta| \rightarrow -\infty$, а потому из условия $\Delta > 0$ имеем $AB > 0$.

На падающем разрыве (характеристика $\eta = +\frac{2}{3}\eta^{3/2}$) имеем $x = \Phi_\eta = -A\theta$, $y = \Phi_\theta = -A\eta$. Поскольку скорость газа направлена в положительном направлении оси x , то этот разрыв, для того чтобы быть «приходящим» по отношению к точке пересечения, должен лежать в полуплоскости $x < 0$. Отсюда следует, что постоянная A , а с нею

и B, C положительны. Уравнение линии разрыва в физической плоскости будет:

$$-y = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} A^{1/3} (-x)^{2/3} = 1,31 A^{1/3} (-x)^{2/3}. \quad (3)$$

Уравнение же отраженного разрыва получается дифференцированием по θ и η функции (2) и гласит

$$-y = 1,31 A^{1/3} x^{2/3} + 115 BA^{-5/3} x^{5/3}, \quad (4)$$

где сохранен также и поправочный член, отсутствующий в (3).

Для определения формы линии перехода производим аналитическое продолжение функции (1) в область вблизи оси $\eta = 0$. Вблизи верхней полуоси получим

$$\Phi = -A\eta\theta - B|\theta|^{11/6} \frac{2\Gamma(1/3)}{\Gamma(17/12)\Gamma(23/12)} = -A\eta\theta - 6,25 B|\theta|^{11/6}, \quad (5)$$

а вблизи нижней полуоси — такое же выражение с $\sqrt{3}B$ вместо B (здесь сохранены лишь члены наиболее низких степеней по η). Производя дифференцирование по θ и η и положив затем $\eta = 0$, получим следующие уравнения двух ветвей линии перехода:

$$y = -11,4 BA^{-5/3} (-x)^{5/3}, \quad y = 11,4 \sqrt{3} BA^{-5/3} x^{5/3}. \quad (6)$$

Взаимное расположение всех линий показано на рис. 2, где обозначения линий и областей соответствуют обозначениям на рис. 1.

Разрыв производных скорости на падающем разрыве можно характеризовать скачком производной $\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y = -\frac{\Phi_{00}}{\Delta}$. Вычисление при помощи (1) дает:

$$\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y\right]_2^1 = 8 \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{B}{A^2} \eta^{-1/2} = 8,56 BA^{-2/3} |y|^{-1/3}. \quad (7)$$

На отраженном же слабом разрыве производные скорости вообще не испытывают скачка, но распределение скоростей имеет своеобразную

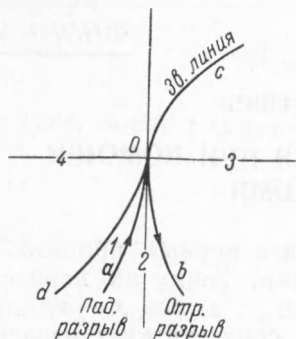


Рис. 2

трансцендентную особенность. Вычислив из функции (2) (сохранив в ней лишь первый член в скобках) координаты x , y , можно представить зависимость η от x при заданном y в следующем параметрическом виде:

$$\eta = \frac{|y|}{A} + \frac{x - x_0}{2VA|y|} - \frac{1}{6A}|y|\zeta,$$

$$x - x_0 = \frac{1}{3VA}|y|^{3/2}\zeta - \frac{8}{\pi}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/4}\frac{B|y|^{7/4}}{A^{3/4}}\zeta \ln|\zeta|, \quad (8)$$

где ζ играет роль параметра, а $x_0 = x_0(y)$ — уравнение линии разрыва в физической плоскости.

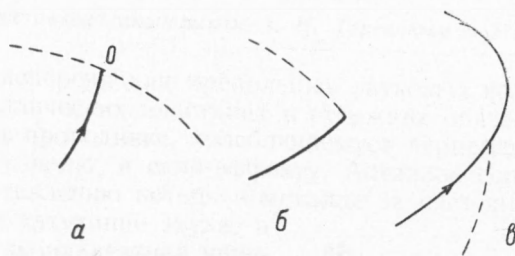


Рис. 3. Сплошные линии — ударная волна, пунктир — звуковая линия

Уравнение Эйлера — Трикоми должно быть применено и к вопросу о возможности окончания ударной волны вниз по течению при ее пересечении со звуковой линией (точка O на рис. 3а, по отношению к которой ударная волна является «приходящей»)*; вблизи такой точки интенсивность ударной волны была бы малой, т. е. течение — околозвуковым. Нами были рассмотрены различные варианты картины течения, отличающиеся, в частности, числом характеристик, оканчивающихся в точке O (при этом следует учитывать, что на «приходящих» характеристиках не должно быть никаких особенностей, так как таковые могли бы возникнуть лишь от каких-либо посторонних причин, не имеющих отношения к окончанию ударной волны). Ни в одном из этих вариантов, однако, не удастся построить решение уравнения Эйлера — Трикоми, которое бы удовлетворяло всем необходимым условиям. Не существует, повидимому, и решений, которые соответствовали бы окончанию ударной волны вместе со звуковой линией в точке их пересечения (рис. 3б). Мы полагаем поэтому (хотя и не имеем строгого доказательства этого утверждения), что ударная волна не может «окончиться», а потому должна либо уходить на бесконечность либо перегибаться, как это показано на рис. 3в, так чтобы быть «исходящей» по отношению к обоим своим концам. Последний случай должен, во всяком случае, иметь место для ударной волны, возникающей в местной сверхзвуковой зоне.

Сделаем также некоторые замечания по поводу формы местной сверхзвуковой зоны, образующейся при обтекании с $M < 1$. До тех пор, пока в ней не возникает ударной волны, эта зона должна целиком примыкать к поверхности обтекаемого тела. В противном случае звуковая линия, проходя позади тела, хотя бы в одной точке была бы перпендикулярна линии тока, будучи при этом обращена своей

* Что касается «начала» ударной волны, то оно может иметь место в любой точке сверхзвукового потока, и исследование его свойств не представляет особых затруднений (ср., например, (1), § 107).

вогнутостью в сторону сверхзвуковой зоны; между тем в такой точке звуковая линия может быть вогнута лишь в сторону дозвуковой области (см., например, (1), § 111). Если же граница сверхзвуковой области проходит позади тела (что, во всяком случае, должно наступить при каких-то значениях M , достаточно близких к 1), то эта граница должна складываться как из звуковой линии, так и из куса пересекающей ее ударной волны (причем, однако, в точках пересечения интенсивность ударной волны отнюдь не обращается в нуль).

Поступило
13 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, 2-е изд., 1953.