

ФИЗИКА

Действительный член АН УССР А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

О ФОКУСИРОВКЕ НАЭЛЕКТРИЗОВАННЫХ ЧАСТИЦ

Известно, что если наэлектризованная частица массы m и заряда e движется в плоскости, перпендикулярной силовым линиям некоторого магнитного поля, то радиус кривизны ее траектории ρ связан с напряжением магнитного поля H соотношением

$$\frac{1}{\rho} = \frac{eH}{mcv}, \quad (1)$$

где c — скорость света. Скорость частицы v при ее движении в магнитном поле остается неизменной.

Рассмотрим следующую задачу *. Пусть из начала системы координат xu вылетают с одной и той же скоростью v по разным направлениям, лежащим в плоскости xu , наэлектризованные частицы с одним и тем же зарядом e и одной и той же массой m , а напряжение поля H является функцией координаты x , т. е.

$$H = H(x). \quad (2)$$

Спрашивается: какова должна быть функция $H(x)$, чтобы траектории всех упомянутых частиц прошли через одну и ту же точку F , расположенную на оси y на заданном расстоянии l от начала координат (см. рис. 1).

Заметим прежде всего, что

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}, \quad (3)$$

где θ — угол наклона скорости какой-либо частицы к оси x и ds — элемент дуги ее траектории, и, кроме того,

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta. \quad (4)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos \theta d\theta}{dx}. \quad (5)$$

Учитывая соотношения (1) и (2), получим теперь равенство

$$\cos \theta d\theta = \frac{eH(x) dx}{mcv}, \quad (6)$$

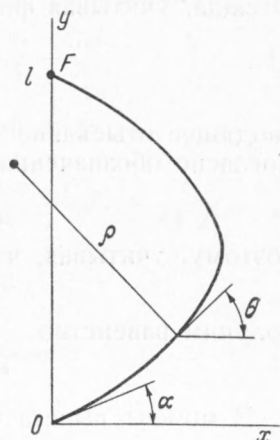


Рис. 1

* Постановкой задачи автор обязан М. В. Пасечнику и В. Е. Дьяченко.

откуда

$$\sin \theta = \sin \alpha + \int_0^x \frac{eH(x) dx}{mcv}, \quad (7)$$

где α — начальное значение угла θ , т. е. угла наклона скорости частицы к оси x в момент ее вылета из начала координат.

Введем обозначения:

$$V(x) = \int_0^x \frac{eH(x) dx}{mcv}, \quad (8)$$

$$\zeta = \sin \theta - \sin \alpha. \quad (9)$$

Тогда, согласно этим обозначениям

$$\zeta = V(x), \quad (10)$$

где $V(x)$ — новая искомая функция.

Введем далее функцию

$$x = \Phi(\zeta), \quad (11)$$

обратную функции $\zeta = V(x)$.

Дифференцируя тождество

$$x \equiv \Phi[V(x)], \quad (12)$$

приходим к равенству

$$\Phi'(\zeta) V'(x) = 1. \quad (13)$$

Отсюда, учитывая формулу (8), получим соотношение

$$H(x) = \frac{mcv}{e\Phi'(\zeta)}, \quad (14)$$

сводящее отыскание функции $H(x)$ к определению функции $\Phi'(\zeta)$. Согласно обозначениями (11) и (9)

$$dx = \Phi'(\zeta) d\zeta, \quad d\zeta = \cos \theta d\theta; \quad (15)$$

поэтому, учитывая, что

$$dy = dy \cdot \operatorname{tg} \theta, \quad (16)$$

получим равенство

$$dy = \Phi'(\sin \theta - \sin \alpha) \sin \theta d\theta. \quad (17)$$

В момент вылета частицы из начала координат $\theta = \alpha$ и $x = y = 0$, поэтому

$$y = \int_{\alpha}^{\theta} \Phi'(\sin \theta - \sin \alpha) \sin \theta d\theta. \quad (18)$$

Радиус кривизны траектории частицы зависит лишь от координаты x и притом однозначно. Вследствие этого траектория частицы симметрична относительно прямой, параллельной оси x и проходящей через ее вершину, т. е. через ту ее точку, в которой касательная параллельна оси y .

В вершине траектории $y = l/2$ и $\theta = \pi/2$. Следовательно, в согласии с равенством (18),

$$\int_{\alpha}^{\pi/2} \Phi'(\sin \theta - \sin \alpha) \sin \theta d\theta = \frac{l}{2}. \quad (19)$$

Последнее соотношение приводится к обычному виду интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода относительно функции $\Phi'(\zeta)$, если, в соответствии с обозначением (9), совершить в нем замену переменных, используя формулы

$$\sin \theta = 1 - (\eta - \zeta), \quad \cos \theta d\theta = d\zeta, \quad \cos \theta = \sqrt{(\eta - \zeta)[2 - (\eta - \zeta)]}, \quad (20)$$

в которых, в свою очередь, обозначено:

$$\eta = 1 - \sin \alpha. \quad (21)$$

В результате получим сингулярное интегральное уравнение

$$\int_0^{\eta} K(\eta - \zeta) \Phi'(\zeta) d\zeta = \frac{l}{2} \quad (22)$$

с ядром класса Абеля

$$K(\tau) = \frac{1 - \tau}{V_{\tau}(2 - \tau)}, \quad \tau = \eta - \zeta. \quad (23)$$

Решение интегрального уравнения вида (22) может быть представлено при помощи трансформации Лапласа — Меллина в форме контурного интеграла. Однако для фактического построения функции $\Phi'(\zeta)$, повидимому, удобнее искать решение в форме ряда

$$\Phi'(\zeta) = \frac{A}{V_{\zeta}} (1 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots). \quad (24)$$

Предварительно представим ядро $K(\tau)$ в виде разложения

$$K(\tau) = \frac{1}{V_{2\tau}} (1 - \tau) \left(1 - \frac{\tau}{2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{V_{2\tau}} \left(1 - \frac{3\tau}{4} - \frac{5\tau^2}{32} + \dots\right). \quad (25)$$

Теперь уравнение (22) принимает следующий вид:

$$\int_0^{\eta} \frac{(1 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots) [1 - \frac{3}{4}(\eta - \zeta) - \frac{5}{32}(\eta - \zeta)^2 + \dots]}{V_{\zeta}(\eta - \zeta)} d\zeta = \frac{l}{AV_2}. \quad (26)$$

Согласно известной формуле анализа имеем:

$$\int_0^a x^{m-1} (a - x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} a^{m+n-1}, \quad (27)$$

и, в частности, в наших обозначениях получим:

$$\int_0^{\eta} \frac{d\zeta}{V_{\zeta}(\eta - \zeta)} = \pi, \quad \int_0^{\eta} \frac{\zeta d\zeta}{V_{\zeta}(\eta - \zeta)} = \frac{\pi}{2} \eta, \quad \int_0^{\eta} \frac{\zeta^2 d\zeta}{V_{\zeta}(\eta - \zeta)} = \frac{3}{8} \pi \eta^2, \dots \quad (28)$$

Используя формулы вида (28), можно почленно проинтегрировать левую часть уравнения (26) и прийти к равенству

$$1 + \left(\frac{1}{2} a_1 - \frac{1.3}{2.4}\right) \eta + \left(\frac{3}{8} a_2 - \frac{1.3}{8.4} a_1 - \frac{3.5}{8.32}\right) \eta^2 + \dots = \frac{l}{\pi A V_2}. \quad (29)$$

Отсюда немедленно получаем

$$A = \frac{l}{\pi V_2}, \quad a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{11}{32}, \dots, \quad (30)$$

и, следовательно, согласно разложению (24),

$$\Phi'(\zeta) = \frac{l}{\pi V 2\zeta} \left(1 + \frac{3}{4}\zeta + \frac{11}{32}\zeta^2 + \dots \right). \quad (31)$$

Как уже упоминалось выше, при $\theta = \alpha$ и, следовательно, при $\zeta = 0$ имеем $x = y = 0$. Учитывая это обстоятельство и интегрируя ряд (31), находим

$$x = \Phi(\zeta) = \frac{lV 2\zeta}{\pi} \left(1 + \frac{1}{4}\zeta + \frac{11}{160}\zeta^2 + \dots \right), \quad (32)$$

откуда, после обращения ряда относительно $V\zeta$, получим

$$V\zeta = \xi - \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{19}{160}\xi^5 - \dots, \quad (33)$$

где

$$\xi = \frac{\pi x}{lV 2}. \quad (34)$$

Согласно формулам (14) и (31) имеем

$$H(x) = \frac{mcv}{e\Phi'(\zeta)} = \frac{mcv\pi V 2\zeta}{el \left(1 + \frac{3}{4}\zeta + \frac{11}{32}\zeta^2 + \dots \right)}. \quad (35)$$

Заменяя здесь переменную ζ ее представлением (33) через ξ и учитывая далее формулу (34), получим искомую функцию $H(x)$ в виде ряда

$$H(x) = \frac{\pi^2 mcv}{el^2} \left(x - \frac{\pi^2 x^3}{2l^2} + \frac{9\pi^4 x^5}{40l^4} - \dots \right).$$

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
8 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Е. Тамм, Основы теории электричества, 1946. ² Г. Б. Двайт, Таблицы интегралов и другие математические формулы, 1948, стр. 196.