

М. Т. НУЖИН

О ПОСТАНОВКЕ И РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 7 III 1954)

Все существующие методы решения задач напорной фильтрации исходят из предположения, что форма основания сооружения уже выбрана заранее. При таком предположении главная трудность при решении задачи состоит в отыскании функции, отображающей область фильтрации на какую-либо каноническую область. Если контур основания имеет более или менее сложные очертания, то отыскание упомянутой функции становится настолько затруднительным, что нередко приходится отказываться от аналитического исследования задачи.

Можно, однако, задачу о фильтрации поставить иначе, рассматривая ее с точки зрения обратных краевых задач^(3,4), т. е. считая контур основания не заданным, а искомым элементом. При таком подходе к вопросу задачу о фильтрации можно сформулировать следующим образом: определить контур основания гидротехнического сооружения по заданному на нем распределению величины скорости фильтрации. При такой постановке задача о фильтрации представляет собой частный случай обратной смешанной задачи*. Для простоты будем предполагать $T = \infty$.

Пусть

$$|v| = f(s) \quad (0 \leq s \leq l)$$

— заданное на искомом контуре распределение величины скорости фильтрации; s — дуговая абсцисса, отсчитываемая от произвольно выбранной точки, например, от верхнего конца флютбета; l — длина контура основания сооружения; $f(s)$ — положительная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера всюду при $0 \leq s \leq l$, кроме, может быть, некоторого числа отдельных точек, где она может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка.

Граничные значения потенциала скорости будут

$$\varphi = \int_0^s f(s) ds - \frac{kH}{2}.$$

Полубесконечную полосу в плоскости w отобразим на нижнюю полуплоскость:

$$w = \omega(t) = \frac{kH}{\pi} \arcsin t \quad (t = t' + it'').$$

* Задачи такого типа рассматривались ранее^(1,2); в работе⁽²⁾ исследуется задача, когда известные части контура представляют собой прямолинейные отрезки, а форма остальных частей отыскивается при условии, что на них скорость фильтрации постоянна; задача решается методом, отличным от излагаемого ниже.

Введем функцию

$$\chi(t) = \xi + i\eta = \ln \frac{dz}{dt}.$$

На участках $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ известна мнимая часть этой функции: $\eta = 0$. На участке $(-1, 1)$ из соотношения

$$\varphi(s) = \omega(t')$$

находим $s(t')$, следовательно, на этом участке известна $\operatorname{Re} \chi$:

$$\xi(t') = \ln \left| \frac{ds}{dt'} \right|.$$

Решение полученной обычной смешанной задачи имеет вид

$$\chi(t) = \frac{i\sqrt{1-t^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\xi(t') dt'}{\sqrt{1-t'^2}(t'-t)}. \quad (1)$$

Условие разрешимости смешанной задачи

$$\int_{-1}^1 \xi(t') \frac{dt'}{\sqrt{1-t'^2}} = \pi \xi(\infty)$$

в данном случае выполняется, являясь просто соотношением, определяющим $\xi(\infty)$.

Функция, отображающая нижнюю полуплоскость на область фильтрации, будет иметь вид:

$$z = \int e^{\chi(t)} dt + C;$$

в этой формуле и содержится решение поставленной задачи.

Нетрудно показать, что для существования решения задачи необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int f(s) ds = kH,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{t' \xi(t') dt'}{\sqrt{1-t'^2}} = 0.$$

Можно показать также, что решение задачи будет единственным.

Отметим, что функция $z(t)$ может оказаться неоднолистной; это будет означать, что заданное распределение скорости фильтрации физически неосуществимо; к сожалению, критерии однолистности $z(t)$ в настоящее время не установлены.

В конкретных задач функция $z(t)$ лишь в простейших случаях будет выражаться в конечном виде. Однако для построения искомого контура нет необходимости определять эту функцию во всей области, достаточно найти лишь граничные значения η :

$$\eta(t^*) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t'^2}}{1-t'^2} \frac{\xi(t') - \xi(t^*)}{t' - t^*} dt' - \frac{\xi(t^*)}{\pi} \ln \frac{1-t^*}{1+t^*}.$$

Координаты искомого контура определяются по формуле

$$x + iy = \int_{-1}^{t^*} \left| \frac{ds}{dt^*} \right| e^{i\eta(t^*)} dt^* + C.$$

Скорость фильтрации на границах бьефов выражается формулой

$$|v| = \frac{kH}{\pi} \frac{e^{-\xi(t^*)}}{\sqrt{t^{*2} - 1}} \quad (|t^*| > 1),$$

где $\xi(t^*)$ определяется из формулы (1).

Поставленную выше задачу можно решать также, приводя ее к обратной задаче об обтекании симметричного профиля чисто циркуляционным потоком. В этом случае необходимые формулы легко получить, опираясь на результаты, изложенные в (3,4). При рассмотрении задачи с этой точки зрения определение вспомогательной функции приводится не к смешанной задаче, а к задаче Дирихле, что удобнее для практических расчетов. Обратные задачи о фильтрации можно решать также и при наличии дренажных устройств в основании сооружения, на чем мы не останавливаемся.

В заключение отметим, что, как показывает изложенное выше, задачи теории фильтрации в обратной постановке решаются значительно проще, чем прямые задачи. В частности, при этом не представляет затруднений изучение оснований гидротехнических сооружений с плавными очертаниями, при которых не возникают опасные большие скорости фильтрации.

Поступило
23 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. П. Вошинин, Инж. сборн., 7 (1950). ² И. Н. Кочина, П. Я. Полубаринова-Кочина, ПММ, 16, в. 1 (1952). ³ Г. Г. Тумашев, Уч. зап. КГУ, 112, кн. 3 (1952). ⁴ М. Т. Нужин, там же, 109, кн. 1 (1949).