

А. Б. ШИДЛОВСКИЙ

О ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ И АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 26 III 1954)

К. Зигель опубликовал метод ⁽¹⁾, который позволяет исследовать арифметическую природу значений некоторого класса целых функций.

Зигель называет целую аналитическую функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}$$

E -функцией, если: 1) все коэффициенты c_n функции $f(z)$ принадлежат к алгебраическому полю K конечной степени над полем рациональных чисел; 2) модули коэффициентов c_n и всех их сопряженных растут медленнее сколь угодно малой положительной степени n^n ; 3) существует последовательность натуральных чисел $\{q_n\}$, растущая медленнее сколь угодно малой положительной степени n^n такая, что числа $q_n c_k$, $k = 0, \dots, n$, — целые алгебраические.

Метод Зигеля может быть применен к классу E -функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых многочлены от z с алгебраическими числовыми коэффициентами. Этот метод является непосредственным обобщением известных идей и результатов Эрмита и Линдемана.

Зигель ⁽²⁾ изложил свой метод в форме общей теоремы об алгебраической независимости значений E -функций при алгебраических значениях аргумента, удовлетворяющих системе линейных однородных дифференциальных уравнений*.

Основной результат Зигеля относится к функциям

$$K_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (\lambda + 1) \cdots (\lambda + n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots, \quad (1)$$

удовлетворяющим линейным однородным дифференциальным уравнениям 2-го порядка и отличающимся только множителем $\frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda$ от функций Бесселя с соответствующим индексом λ . Он доказал, что если λ — рациональное число, не равное половине нечетного числа, то для любого алгебраического значения $\alpha \neq 0$ числа $K_\lambda(\alpha)$ и $K'_\lambda(\alpha)$ алгебраически независимы, а также некоторые обобщения этого предложения.

Общая теорема Зигеля сводит доказательство алгебраической независимости конечного числа значений E -функций на доказательство

* Изложение метода Зигеля дано в ⁽³⁾.

некоторого аналитического условия нормальности произведений степеней этих функций. Условие нормальности, являясь достаточным условием теоремы, накладывает слишком большие ограничения на исследуемые функции. Поэтому, несмотря на внешне общую форму теоремы Зигеля, она могла найти лишь весьма узкий круг приложений. Исследование нормальности произведений степеней E -функций, как указывает сам Зигель, является очень трудной задачей, если основная E -функция удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению порядка выше второго. До сих пор каких-либо результатов в этом направлении не было получено, да и вообще автору настоящей заметки не известно ни одной работы, связанной с методом Зигеля, кроме указанных работ самого Зигеля.

Вообще говоря, метод Зигеля может быть применен и в случае, когда основная E -функция удовлетворяет линейному неоднородному дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами. Но общую теорему в этом случае применять нельзя, так как условие нормальности заведомо нарушается для совокупности E -функций, удовлетворяющих неоднородной системе дифференциальных уравнений.

Оказывается, что теорему Зигеля можно доказать в менее стеснительных предположениях.

Систему E -функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$, являющуюся решением системы линейных однородных уравнений

$$y'_k = \sum_{i=1}^m Q_{k,i}(z) y_i, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2)$$

коэффициенты которых $Q_{k,i}(z)$ — рациональные функции от z с алгебраическими числовыми коэффициентами, будем называть неприводимой, если ни одна из этих функций не равна тождественно нулю и соотношение

$$\sum_{k=1}^m P_k(z) y_k = 0,$$

где $P_k(z)$ — произвольные многочлены от z , а $y_1, \dots, y_m$ — какое-либо решение системы (2), возможно лишь в случае, когда

$$P_k(z) y_k = 0, \quad 1 \leq k \leq m,$$

тождественно по z .

Тогда имеет место:

Основная теорема. Пусть система E -функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$ является решением системы линейных дифференциальных уравнений (однородных или неоднородных)

$$y'_k = Q_{k,0}(z) + \sum_{i=1}^m Q_{k,i}(z) y_i, \quad k = 1, \dots, m,$$

коэффициенты которых $Q_{k,i}(z)$ — рациональные функции от z с алгебраическими коэффициентами, а $\nu_N = \frac{(m+N)!}{m! N!}$ произведений степеней функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$, $f_1^{k_1}(z) \dots f_m^{k_m}(z)$, $k_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, $k_1 + \dots + k_m \leq N$, при любом $N = 1, 2, \dots$ образуют неприводимую систему E -функций.

Тогда для любого алгебраического значения α , отличного от нуля и полюсов всех функций $Q_{k,i}(z)$, m чисел $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ алгебраически независимы.

Наша теорема не только обобщает теорему Зигеля на случай E -функций, являющихся решением неоднородной системы, но и позволяет с успехом применять ее к некоторым классам E -функций, удовлетворяющих однородным уравнениям, для которых условие нормальности Зигеля заведомо нарушается. В приложениях основной теоремы к конкретным E -функциям впервые устанавливается трансцендентность и алгебраическая независимость значений E -функций, удовлетворяющих линейным однородным и неоднородным дифференциальным уравнениям 3-го и 4-го порядков.

Если $f(z)$ — целая функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (3)$$

то в дальнейшем символом

$$\int_0^z t^{\beta-1} f(t) dt, \quad \beta \neq 0, -1, -2, \dots,$$

будем обозначать ту первообразную для функции $z^{\beta-1} f(z)$, которая получается после умножения ряда (3) на $z^{\beta-1}$ и почленного интегрирования с постоянной интегрирования, равной нулю.

Рассмотрим функции $K_\lambda(z)$ (1)

$$K_{\lambda, \mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda+1) \dots (\lambda+n) (\mu+1) \dots (\mu+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad \lambda, \mu \neq -1, -2, \dots,$$

и

$$A_\lambda(z) = \int_0^z \frac{K_\lambda(t) - 1}{t} dt,$$

из которых последние удовлетворяют линейным неоднородным дифференциальным уравнениям, соответственно, 2-го и 3-го порядков.

Теорема 1. Если λ и μ — рациональные числа, а разность $\lambda - \mu$ не равна половине нечетного числа, то для любого алгебраического значения $\alpha \neq 0$ числа $K_{\lambda, \mu}(\alpha)$ и $K'_{\lambda, \mu}(\alpha)$ алгебраически независимы.

Теорема 2. Если λ рационально и не равно половине нечетного числа, то для любого алгебраического значения $\alpha \neq 0$ три числа $A_\lambda(\alpha)$, $K_\lambda(\alpha)$ и $K'_\lambda(\alpha)$ алгебраически независимы.

Пусть

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1) \dots (\lambda+n)}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots,$$

$$\psi_\lambda(z) = z^{-\lambda} e^z \int_0^z t^{\lambda-1} e^{-t} \varphi_\lambda(t) dt.$$

Эти функции удовлетворяют неоднородным дифференциальным уравнениям 1-го и 2-го порядков, а функции

$$\omega_0(z) = \int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n! n},$$

$$\omega_{\lambda, 1}(z) = z^{-\lambda} \int_0^z t^{\lambda-1} e^t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! (n + \lambda)}, \quad \lambda \neq 0, -1, -2, \dots,$$

$$\omega_{\lambda, 2}(z) = z^{-\lambda} \int_0^z t^{\lambda-1} \omega_{\lambda, 1}(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! (n + \lambda)^2}$$

удовлетворяют уравнениям: первая — неоднородному 2-го порядка, а последние — однородным, соответственно, 2-го и 3-го порядков. Относительно этих функций имеют место теоремы:

Теорема 3. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — алгебраические числа, линейно независимые в поле рациональных чисел. Тогда n чисел $\varphi_\lambda(\alpha_1), \dots, \varphi_\lambda(\alpha_n)$ алгебраически независимы при любом рациональном $\lambda \neq -1, -2, \dots$

При $\lambda = 0$ утверждение теоремы есть известная теорема Линдемана, так что теорема 3 является непосредственным обобщением последней.

Теорема 4. Числа $\omega_0(\alpha)$ и e^α алгебраически независимы при любом алгебраическом значении $\alpha \neq 0$.

Теорема 5. Если рациональное число λ не является целым, то числа $\psi_\lambda(\alpha)$ и $\varphi_\lambda(\alpha)$ алгебраически независимы при любом алгебраическом значении $\alpha \neq 0$.

Непосредственным следствием последней теоремы является

Теорема 6. Если рациональное число λ не является целым, а $\alpha \neq 0$ — алгебраическое, то из двух чисел $\omega_{\lambda,1}(\alpha)$ и $\omega_{\lambda,2}(\alpha)$ хотя бы одно трансцендентно. При этом, если одно из них окажется алгебраическим, то другое будет алгебраически независимо с числом e^α .

Относительно функций

$$H_1(z) = z^{-\beta} e^z \int_0^z t^{\beta-1} e^{-t} K_\lambda(t) dt, \quad \beta \neq 0, -1, -2, \dots,$$

и

$$H_2(z) = z^{-\beta} e^z \int_0^z t^{\beta-1} e^{-t} H_1(t) dt,$$

удовлетворяющих линейным однородным дифференциальным уравнениям, соответственно, 3-го и 4-го порядков, устанавливается следующая теорема:

Теорема 7. Если λ и β рациональны, а λ не равно половине нечетного числа, то для любого алгебраического значения $\alpha \neq 0$ четыре числа $H_2(\alpha)$, $H_1(\alpha)$, $K_\lambda(\alpha)$ и $K'_\lambda(\alpha)$ алгебраически независимы.

Теоремы 1, 2 и 7 содержат как частный случай результат Зигеля относительно функций $K_\lambda(z)$.

Из указанных теорем следует трансцендентность нулей всех функций ($z \neq 0$), для которых установлена трансцендентность значений при алгебраических значениях аргумента, отличных от нуля. Основную теорему можно применить и к другим E -функциям, удовлетворяющим линейным дифференциальным уравнениям.

В заключение считаю своим долгом поблагодарить проф. А. О. Гельфонда за советы и внимание к моей работе.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
9 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ K. Siegel, Abh. Preuss. Acad. Wiss., No. 1, 70 (1929—1930). ² K. Siegel, Transcendental Numbers, Princeton, 1949. ³ А. О. Гельфонд, Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952.