

К. Я. ЛАТЫШЕВА

ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ Б. С. ПОПОВА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 III 1954)

В статье Б. С. Попова ⁽⁵⁾ доказана разрешимость в квадратурах уравнения

$$y'' + (ae^x + b)y' + (Ae^{2x} + Be^x + C)y = 0 \quad (1)$$

(a, b, A, B, C — постоянные), если существует целое неотрицательное число n , которое удовлетворяет одному из четырех равенств:

$$ab - 2B + a = \pm (a^2 - 4A)^{1/2} [2n + 1 \pm (b^2 - 4C)^{1/2}]. \quad (2)$$

В настоящей статье показывается, что разрешимость уравнения (1) при условии (2) является частным случаем разработанной нами общей теории ⁽¹⁻⁴⁾ нахождения в указанном нами замкнутом виде решения линейных уравнений с полиномиальными коэффициентами.

Действительно, вводя новую независимую переменную t по формуле $e^x = t$, преобразуем уравнение (1) к виду

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + [at + (b + 1)] t \frac{dy}{dt} + (At^2 + Bt + C)y = 0. \quad (3)$$

Ранг ⁽¹⁾ уравнения (3) равен единице. Согласно данной нами методике ⁽²⁻⁴⁾ применим к уравнению (3) преобразование $y = ue^{\alpha t}$, где α — временно неопределенный параметр. Дифференциальное уравнение относительно новой неизвестной функции u имеет вид:

$$t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + [(2\alpha + a)t + b + 1] t \frac{du}{dt} + [(\alpha^2 + a\alpha + A)t^2 + (b\alpha + \alpha + B)t + C] u = 0. \quad (4)$$

Определяя ⁽²⁾ неизвестное α из уравнения $\alpha^2 + a\alpha + A = 0$, находим

$$\alpha = -\frac{a}{2} + k, \quad k = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - A},$$

после чего уравнение (4) перепишется в виде:

$$t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + (2kt + b + 1) t \frac{du}{dt} + \left\{ [B + (b + 1) \left(k - \frac{a}{2} \right)] t + C \right\} u = 0. \quad (5)$$

Для уравнений типа (5) нами найдены ^(3,4) необходимые и достаточные условия существования многочленного решения:

$$u = t^s (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) \quad (6)$$

($s, a_0, \dots, a_n$ — некоторые определенные постоянные, n — неотрица-

тельное целое число), согласно которым ⁽⁴⁾ должно существовать равенство:

$$-\frac{B}{2k} + \frac{(b+1)(a-2k)}{4k} + \frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} - C} = n,$$

что после небольших алгебраических переделок и учета значения k приводит к условию (2).

Обозначая через α_1 значение α , взятое с тем знаком, для которого удовлетворяется условие (2), находим вид искомого решения* уравнения (1):

$$y = e^{sx + \alpha_1 e^x} (a_0 + a_1 e^x + \dots + a_n e^{nx}).$$

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
1 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К. Я. Латишева, Наук. зап. КДУ, Матем. збірн., № 3, 79 (1949).
² К. Я. Латишева, там же, № 4, 51 (1950). ³ К. Я. Латышева, Автореферат докторск. диссертации, Усп. матем. наук, 8, в. 5, 205 (1953). ⁴ К. Я. Латишева, Наук. зап. КДУ, Матем. збірн., № 7, 95 (1953). ⁵ В. С. Поро в, Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., ser. 5, 39, No. 2, 179 (1953); Рефер. журн., Математика, № 3, реферат № 1182 (1953).

* Не указанного в статье Б. С. Попова.