

Б. П. ДЕМИДОВИЧ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПРИНЦИПА УСРЕДНЕНИЯ Н. Н. БОГОЛЮБОВА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 2IV 1954)

1°. Н. Н. Боголюбов в своей известной работе (1) доказал, что решение $x = x(t, \varepsilon)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (1)$$

где x — одноколонная матрица конечного порядка, ε — малый положительный параметр и матрица $X(t, x)$ удовлетворяет обычным условиям, если $x(0, \varepsilon) = x_0$ конечно и не зависит от ε , стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к соответствующему решению $\xi = \xi(t)$ ($\xi(0) = x_0$) усредненной системы

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \quad (2)$$

где

$$X_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt, \quad (3)$$

причем равномерная близость этих двух решений может быть обеспечена на любом конечном участке длины $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Теорема Боголюбова была распространена Ф. С. Лосем (2) на дифференциальные уравнения в гильбертовом пространстве.

Естественно попытаться получить аналогичные теоремы для систем более общего вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \varepsilon). \quad (4)$$

Системы (4) рассматривались Фату (3) в предположении, что матрица $f(t, x, \varepsilon)$ дифференцируема по x и периодична по t с малым периодом $\omega = 2\pi\varepsilon$. Целью настоящей статьи является распространение результата Н. Н. Боголюбова на общие системы (4).

2°. Приводим формулировку соответствующей теоремы.

Теорема. Пусть матрица $f(t, x, \varepsilon)$ системы (4) удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t, x, \varepsilon)$ комплекснозначна, определена и непрерывна по совокупности переменных t, x и ε в области: $0 \leq t < +\infty, x \in D, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где D — некоторая область n -мерного пространства $E^n = (x_1, \dots, x_n)$ и ε_0 — положительное число;

2) в каждой компактной части σ области изменения переменных t и x равномерно по ε имеет место неравенство

$$\|f(t, x, \varepsilon)\| \leq M(\sigma)^*;$$

3) выполнено условие Липшица

$$\|f(t, \tilde{x}, \varepsilon) - f(t, x, \varepsilon)\| \leq L(\sigma) \|\tilde{x} - x\|;$$

* Под нормой матрицы $A = [a_{jk}]$ здесь понимается $\|A\| = \sum_{j,k} |a_{jk}|$.

4) существует предельное среднее значение

$$\bar{f}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, \varepsilon) dt,$$

не зависящее от выбора числа T ($0 < T < +\infty$), равномерно по x на любом компактном множестве $D_0 \subset D$.

В таком случае для всякого решения $x = x(t, \varepsilon)$ системы (4), такого, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t_0, \varepsilon) = x_0 \in D, \quad (5)$$

справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t), \quad (6)$$

где $\bar{x} = \bar{x}(t)$ — решение усредненной системы

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}),$$

удовлетворяющее условию $\bar{x}(0) = x_0$, причем соотношение (6) выполнено равномерно на каждом конечном отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$, целиком принадлежащем интервалу определения предельного решения.

Доказательство теоремы может быть проведено методом последовательных приближений.

Примечание 1. Пусть $f(t, x, \varepsilon) = X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right)$.

Полагая $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, приходим к системе вида (1), рассмотренной Н. Н. Боголюбовым, причем

$$\bar{f}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) dt \equiv X_0(x). \quad (7)$$

Примечание 2. Для выполнения условия 4) достаточно наличия одного из следующих двух условий:

4') $f(t, x, \varepsilon)$ — периодическая матрица относительно переменной t с периодом $\omega = \omega(x, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \in D_0$, причем равномерно на D_0 существует $\bar{f}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(t, x, \varepsilon) dt$;

или 4'') $f(t, x, \varepsilon)$ — почти периодическая матрица относительно переменной t , разлагающаяся в ряд Фурье

$$f(t, x, \varepsilon) = C_0(x, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{it\Lambda_k(x, \varepsilon)} C_k(x, \varepsilon),$$

абсолютно и равномерно сходящийся в области $-\infty < t < +\infty$, $x \in D_0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, причем $\Lambda_k = \Lambda_k(x, \varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($k = 1, 2, \dots$; $x \in D_0$) и, сверх того, равномерно на D_0 существует предельное сред-

нее значение $\bar{f}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, \varepsilon) dt \right\}$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, АН УССР, 1945. ² Ф. С. Лось, Укр. матем. журн., 2, № 3, 87 (1950).
³ М. Р. Fatou, Bull. Soc. Math. de France, 56, 98 (1928).