

Член-корреспондент АН СССР А. ГЕЛЬФОНД

О МНОГОЧЛЕНАХ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ ВМЕСТЕ СО СВОИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Рассмотрим числа $\sigma_{n,m}$, $n \geq m + 2$, $m \geq 0$,

$$\sigma_{n,m} = \min_p \max_{0 \leq s \leq m} \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|p^{(s)}(x)|}{n(n-1) \dots (n-s+1)}, \quad (1)$$

где минимум берется по всем многочленам степени n с действительными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице. Задача отыскания многочленов, реализующих минимум в этом случае, и нахождения чисел $\sigma_{n,m}$ является естественным обобщением поставленной и решенной П. Л. Чебышевым хорошо известной проблемы о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля. В настоящей заметке мы дадим асимптотически точную при $m = o(\sqrt{n})$ оценку чисел $\sigma_{n,m}$, укажем многочлены, реализующие эту оценку, и дадим точное решение задачи (1) в частном случае и в несколько измененной постановке.

Положим

$$T_{n,0}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x,$$

$$T_{n,1}(x) = T_{n,0}(x) - \frac{n}{4(n-2)} T_{n-2,0}(x), \quad (2)$$

$$T_{n,k}(x) = T_{n,k-1}(x) - \frac{n(n-1)}{4(n-k)(n-k-1)} T_{n-2,k-1}(x), \quad 0 \leq k \leq n-2.$$

Нетрудно видеть, что $T_{n,0}(x)$ — многочлен Чебышева и что $T_{n,k}(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1.

Далее, так как

$$|T_{n,1}(\cos t)| \leq 2^{-n+1} \left(1 + \frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)} \right) = 2^{-n+2} \lambda_1(n), \quad n \geq 3,$$

$$|T_{n,k}(x)| \leq \max_{|x| \leq 1} |T_{n,k-1}(x)| + \frac{n(n-1)2^{-2}}{(n-k)(n-k-1)} \max_{|x| \leq 1} |T_{n-2,k-1}(x)|,$$

то отсюда по индукции мы получаем, что

$$|T_{n,k}(x)| \leq 2^{-n+k+1} \lambda_k(n), \quad \lambda_k(n) = \frac{1}{2} \left[\lambda_{k-1}(n) + \frac{n(n-1)}{(n-k)(n-k-1)} \lambda_{k-1}(n-2) \right]. \quad (3)$$

Из этой формулы при $-1 \leq x \leq 1$ непосредственно следует оценка

$$2^{n-k-1} |T_{n,k}(x)| \leq \lambda_k(n) < 2^{-k} \prod_{v=0}^{k-1} \left[1 + \frac{(n-2v)(n-2v-1)}{(n-v-k)(n-v-k-1)} \right] = e^{O(k^2/n)}, \quad (4)$$

верная для $0 \leq s \leq n - 2s$. Далее, так как

$$\begin{aligned} T'_{n,1}(x) &= 2^{-n+1} \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} [\sin n \arccos x - \sin(n-2) \arccos x] = \\ &= \frac{n}{2^{n-2}} \cos(n-1) \arccos x = n T_{n-1,0}(x), \end{aligned} \quad (5)$$

то по индукции мы легко получаем, что

$$T_{n,m}^{(s)}(x) = \frac{n!}{(n-s)!} T_{n-s,m-s}(x), \quad 0 \leq s \leq m. \quad (6)$$

Из оценки (4) и этого соотношения мы получаем неравенство

$$\max_{0 \leq s \leq m} \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|T_{n,m}^{(s)}(x)|}{n(n-1) \dots (n-s+1)} \leq 2^{-n+m+1} \lambda_m^n \leq 2^{-n+m+1} e^{O(m^2/n)}. \quad (7)$$

Теорема 1. Числа $\sigma_{n,m}$, определенные соотношением (1), удовлетворяют при $n \geq m+2$, $m \geq 0$ неравенствам

$$2^{-n+m+1} \leq \sigma_{n,m} \leq 2^{-n+m+1} e^{O(m^2/n)}. \quad (8)$$

Действительно, оценка сверху следует из неравенства (7). Оценка снизу есть следствие того обстоятельства, что по формуле (6)

$$\frac{1}{n(n-1) \dots (n-m+1)} T_{n,m}^{(m)}(x) = T_{n-m,0}(x), \quad (9)$$

где $T_{n-m,0}(x)$ есть многочлен Чебышева степени $n-m$. Этим теорема 1 доказана. Заметим также, что знаки равенства в неравенствах (8) могут быть легко сняты.

Итак, многочлены $T_{n,m}(x)$ при $m = o(\sqrt{n})$ асимптотически решают задачу (1). Пусть многочлен $q_{m-1}(x)$ степени не выше $m-1$ реализует минимум

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m} &= \min_{p(x)} \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_{n,m}(x) - p(x)|, \\ p(x) &= a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Положим

$$R_{n,m}(x) = T_{n,m}(x) - q_{m-1}(x).$$

Теорема 2. Многочлен $R_{n,m}(x)$ является единственным многочленом степени n со старшим коэффициентом единица, удовлетворяющим неравенству

$$\min_{p(x)} \max \left[\max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)|, \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{(n-m)! \lambda_{n,m}}{n! 2^{n-m-1}} |p^{(m)}(x)| \right] \leq \lambda_{n,m}, \quad (11)$$

где минимум берется по всем многочленам степени n со старшим коэффициентом, равным единице, и $n \geq m+2$, $m \geq 0$.

Доказательство. Заметим, что многочлен $p(x)$, для которого удовлетворяется неравенство (11), обладает тем свойством, что

$$\frac{|p^{(m)}(x)|}{n(n-1) \dots (n-m+1)} \leq 2^{-n+m+1}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (12)$$

причем старший коэффициент многочлена степени $n-m$, стоящего в левой части этого неравенства, есть единица. Отсюда следует, что

этот многочлен совпадает с многочленом Чебышева $T_{n-m, 0}$. Как известно, неравенство (12) выполняется только для многочлена Чебышева. Поэтому $p^{(m)}(x) = T_{n, m}^{(m)}(x)$ и, значит, $p(x) = R_{n, m}(x) + u(x)$, где $u(x)$ — многочлен степени не выше $m-1$. Но, как известно из общей теории наилучших приближений, существует только один многочлен $q_{m-1}(x)$ степени не выше $m-1$, удовлетворяющий условиям (10). Значит,

$$u(x) = 0,$$

так как

$$|p(x)| = |R_{n, m}(x) + u(x)| \leq \lambda_{n, m}.$$

Этим теорема доказана. В случае $m = 1$

$$\lambda_{n, 1} = \frac{n-1}{n-2} 2^{-n+2} \cos \frac{\pi}{n-1},$$

$$q_0(x) = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(\left[\frac{n+2}{2} \right] - \left[\frac{n+1}{2} \right] \right) \frac{2(n-1)}{n-2} \sin^2 \frac{\pi}{2(n-1)}.$$

Теорема 2 показывает, что можно, изменив условие (1) чрезвычайно мало, умножив $p^{(s)}(x) \frac{(n-s)!}{n!}$ на $1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$, при m фиксированном добиться того, чтобы $T_{n, m}(x)$ было экстремальным многочленом задачи. Эти многочлены $T_{n, m}(x)$, повидимому, могут иметь значение для теории совместных приближений функции и ее производных многочленом и его производными.

Заметим в заключение, что

$$T_{n, m}(x) = \frac{n!}{(n-m)!} 2^{-n+m+1} \int_1^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} \cos n \arccos y dy + \\ + \sum_{q=0}^{m-1} \frac{n!}{q!(n-q)!} 2^{-n+q+1} \prod_{s=1}^{m-q} \left(1 - \frac{n(n-1)}{(n-s)(n-s-1)} \right).$$

Поступило
31 III 1954