

Е. А. ВОЛКОВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ МЕТОДА СЕТОК

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 III 1954)

1. В работе Фокса ⁽¹⁾ и с некоторыми видоизменениями в работе Вудза ⁽²⁾ предлагаются практические приемы уточнения решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона, полученного методом сеток. Сущность этих приемов состоит в том, что по полученному первому приближению формально вычисляются первый или несколько членов какого-либо разложения по степеням h выражения разности между дифференциальным оператором и применяемым разностным оператором. Затем вычисленная таким способом поправка добавляется к свободным членам разностного уравнения, которое вновь решается. Вудз в работе ⁽²⁾, например, указывает, что такой процесс уточнений можно повторять несколько раз и, не доказывая, утверждает сходимость процесса, повидимому, к решению разностного уравнения, содержащего уточняющие члены. Априори неясно, будет ли вообще иметь место сходимость бесконечного процесса уточнений, а если и будет, то встает вопрос, как хорошо приближается точное решение предельным разностным решением. Указанные приемы уточнения, предложенные в работах ^(1, 2), подкрепляются только примерами, и авторы этих работ не проводят исследования таких важных вопросов, как область применимости метода уточнений, скорость сходимости каждого приближения к точному решению в зависимости от шага h и от приближения к приближению и др.

2. В настоящей заметке приводятся результаты исследования одного способа уточнения решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области G с криволинейной границей Γ в двумерном случае. Полученные результаты непосредственно распространяются на трехмерный случай. При составлении разностного уравнения во внутренних узлах привлекается простейший на квадратной сетке оператор

$$\Delta_h u_{ij} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}. \quad (1)$$

Для сноса граничной функции в узлы ступенчатого аппроксимирующего контура из экстраполяционного многочлена Лагранжа строится интерполяционная формула

$$\begin{aligned} f_0 &\equiv f(t\bar{h}) \alpha^{(n)}(t) + \sum_{m=1}^n f_m \alpha_m^{(n)}(t) - \bar{h}^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1} \equiv \\ &\equiv f(t\bar{h}) \prod_{k=1}^n \frac{k}{t+k} + \sum_{m=1}^n f_m \frac{t}{t+m} \frac{n!}{(n-m)! m!} (-1)^{m-1} - \bar{h}^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1} t \quad (t \geq 0), \end{aligned} \quad (2)$$

где $f = f(z)$; $t = z/\bar{h}$; $f_m = (-m\bar{h})$ ($m = 0, 1, \dots, n$); при $t \geq 0$ $-n\bar{h} < \xi < t\bar{h}$.

Очевидно, для каждого значения σ ($0 < \sigma < 1$) найдется $\mu_n(\sigma) > 0$ такое, что при $0 \leq t \leq \mu_n(\sigma)$

$$\sum_{m=1}^n |\alpha_m^{(n)}(t)| \leq 1 - \sigma. \quad (3)$$

Обозначим

$$\bar{\Delta}^{(n+1)} f_0 = f(t\bar{h}) \alpha^{(n)}(t) + \sum_{m=1}^n f_m \alpha_m^{(n)}(t) - f_0. \quad (4)$$

Пусть в области G задано уравнение Пуассона

$$\Delta u = \varphi \quad (5)$$

с граничным условием $u|_{\Gamma} = f$.

Составим разностное уравнение

$$\Delta_h \bar{u}_{ij}^{(1)} = h^2 \varphi_{ij}, \quad \bar{\Delta}^{(2n-2)} \bar{u}_{ij}^{(1)} = 0. \quad (6)$$

Оператор Δ_h записан для всех узлов, имеющих все соседние узлы, принадлежащие $\bar{G}$. Предполагается, что оператор $\bar{\Delta}^{(2n-2)}$ записан для всех остальных узлов, принадлежащих $\bar{G}$, причем в качестве $\bar{u}^{(1)}(t\bar{h})$ используется граничное значение $u \equiv f$, а в качестве $\bar{u}_m^{(1)}$ ($m = 1, 2, \dots$) — значения $\bar{u}_{ij}^{(1)}$ через несколько шагов основного разбиения h , т. е. при $\bar{h} \geq h/\mu_n(\sigma)$, для того чтобы выполнялось условие (3). При выполнении условия (3) разностное уравнение (6) имеет единственное решение, может решаться методом итераций и имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если $\Gamma \in L_{2n}(B, \lambda)$ ($n > 2$), $f \in H(2n, A, \lambda)$ и если $\varphi \in H(2n-2, A, \lambda)$ bG^* , то решение $\bar{u}^{(1)}$ разностного уравнения (6), аппроксимирующее решение и внутренней задачи Дирихле для уравнения (5), выражается через u в следующем виде:

$$\bar{u}_{ij}^{(1)} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{n-2} h^{2k} (w_k^{(1)})_{ij} + O(h^{2n-2}),$$

где $w_k^{(1)}$ — некоторые не зависящие от h функции, принадлежащие в области G классу $H(2n-2k, A^{(1)}, \lambda^{(1)})$.

Обозначим через $D_x^{(r,n)}$ оператор вычисления r -й производной по x функции, заданной с постоянным шагом h по оси Ox , полученный из интерполяционной формулы Стирлинга или Ньютона с использованием n -х разностей. Введем операторы $D_x^{(n)}$, $D_y^{(n)}$ и $D^{(n)}$ следующим образом:

$$D_x^{(n)} = 2 \sum_{m=2}^{n-1} \frac{h^{2m}}{(2m)!} D_x^{(2m, 2n-1)}; \quad D_y^{(n)} = 2 \sum_{m=2}^{n-1} \frac{h^{2m}}{(2m)!} D_y^{(2m, 2n-1)};$$

$$D^{(n)} = D_x^{(n)} + D_y^{(n)}.$$

* Определения L и H см. в (3).

Если u является решением уравнения (5) при условиях теоремы 1, то можно показать

$$\Delta_h u_{ij} = h^2 \varphi_{ij} + D^{(n)} u_{ij} + O(h^{2n}). \quad (7)$$

Теорема 2. Если имеется q -е приближение $\bar{u}^{(q)}$ к решению уравнения (5) при условиях теоремы 1, выражающееся через u в виде

$$\bar{u}_{ij}^{(q)} = u_{ij} + \sum_{k=q}^{n-2} h^{2k} (w_k^{(q)})_{ij} + O(h^{2n-2q}), \quad (8)$$

где $w_k^{(q)}$ — некоторые не зависящие от h функции, принадлежащие в области G классу $H(2n-2k, A^{(q)}, \lambda^{(q)})$, то решение $\bar{u}^{(q+1)}$ разностного уравнения

$$\Delta_h \bar{u}_{ij}^{(q+1)} = h^2 \varphi_{ij} + D^{(n)} \bar{u}_{ij}^{(q)}, \quad \bar{\Delta}^{(2n-2)} \bar{u}_{ij}^{(q+1)} = 0$$

является $(q+1)$ -м приближением, выражающимся через u в виде (8) при замене q на $q+1$.

3. Из теоремы 2 следует: во-первых, что q -е приближение ($q \leq [\frac{n}{2}]$, n фиксировано) сходится к точному решению u со скоростью h^{2q} ; во-вторых, что при достаточно малых h любое q -е приближение ($q \leq [\frac{n}{2}]$, n фиксировано) будет лучше приближать u , чем $(q-1)$ -е приближение; в-третьих, по q -му приближению (8) можно численно находить r -е производные u , при этом порядок погрешности не будет превосходить $\max\{h^{2q}, h^{2n-2q-r}\}$.

4. Имеется предположение, которое подтверждается на практике, о том, что погрешность $O(h^{2n-2q})$ в формуле (8) на самом деле имеет порядок $O(h^{2n-2})$.

5. В разностном уравнении (6) для внутренних узлов привлекается простейший оператор (1), а для граничных узлов практически мало приемлемый оператор $\bar{\Delta}^{(2n-2)}$. Дело в том, что разница между значением оператора Δ_h и оператора Лапласа от u выражается через достаточно гладкие функции (см., например, (7)), которая, как доказывает теорема 1, порождает достаточно гладкий характер погрешности разностного решения, и эта погрешность исчезает в процессе уточнений. Погрешность же граничного оператора имеет беспорядочный характер, и поэтому требуется уменьшить эту погрешность до необходимого минимума уже в первом приближении, что достигается за счет усложнения граничного оператора. Кроме граничного оператора (4) в литературе известны граничные операторы, имеющие погрешность порядка h^3 для любых граничных узлов, и операторы, имеющие погрешность порядка h^4 для некоторого типа граничных узлов (4).

6. Если граница области совпадает со ступенчатым сеточным контуром, то разностное уравнение (6) существенно упрощается, так как исчезают операторы $\bar{\Delta}^{(2n-2)}$, но для таких областей теоремы 1 и 2 не доказаны.

7. Решалось методом уточнений уравнение $\Delta u = -2\pi^2 \sin \pi x \times \sin \pi y$ ($u|_{\Gamma} = 0$) в квадрате ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$) при $h = 0,1$. Вычисления велись с 8 знаками. Первое приближение дало 2 верных знака, второе — 4, третье — 6, дальше вычисления не производились. Оператор $D^{(n)}$ составлялся с использованием восьмых разностей. Согласно (5), если для получения решения с 6 верными знаками идти

по пути простого измельчения сетки, то потребуется выполнить в $10^5 + 10^7$ раз большую работу по сравнению с методом уточнений.

Поступило
22 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ L. Fox, Proc. Roy. Soc., A, **190**, 31 (1947). ² L. Woods, Quart. J. Mech. and Appl. Math., **3**, 349 (1950). ³ Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, 1953. ⁴ Ш. Е. Микеладзе, Изв. АН СССР, сер. матем., **5**, № 1 (1941). ⁵ S. Francel, MTAC, **4**, No. 30 (1950).