

Л. А. ЧЕРНОВ

КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком Н. Н. Андреевым 25 V 1954)

1. Во всякой реальной среде помимо регулярных наблюдаются нерегулярные изменения свойств среды в пространстве и во времени. При распространении волны происходит ее рассеяние на случайных неоднородностях. Рассеянные волны, накладываясь на первичную волну, вызывают флуктуации амплитуды и фазы результирующего поля.

В работе рассмотрен вопрос о корреляции флуктуаций амплитуды и фазы в точке приема, а также вопрос о корреляции флуктуаций амплитуды (или фазы) в различных точках приема. Показано, что в случае крупномасштабных неоднородностей корреляция между флуктуациями амплитуды (или фазы) простирается на расстояние того же порядка, что и корреляция между случайными неоднородностями самой среды.

Оба вопроса рассмотрены ниже в предположении, что среда изотропна, регулярные изменения однородности отсутствуют, случайные отклонения показателя преломления среды от среднего значения малы, а масштаб их велик по сравнению с длиной волны.

2. Пусть показатель преломления колеблется около среднего значения, равного единице:

$$n = 1 + \mu, \quad |\mu| \ll 1. \quad (1)$$

Тогда волновая функция ψ , характеризующая волновое поле, будет удовлетворять уравнению

$$\nabla^2 \psi - \frac{(1 + \mu)^2}{c_0^2} \ddot{\psi} = 0, \quad (2)$$

где c_0 — среднее значение скорости распространения волны в среде.

Будем, ради определенности, считать, что случайные неоднородности имеются лишь в правом полупространстве ($x > 0$). Левое полупространство ($x < 0$) случайных неоднородностей не содержит. Плоская волна падает из левого полупространства в направлении оси x .

А. М. Обухов⁽¹⁾ решил уравнение (2) в этих предположениях, пользуясь методом малых возмущений в той форме, какую ему придал С. М. Рытов⁽²⁾, и получил для изменений фазы и амплитуды (уровня силы звука), обусловленных неоднородностями, следующие формулы:

$$S'(x, y, z) = k \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1\left(\frac{x-\xi}{k}, \rho\right) \mu(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta; \quad (3)$$

$$\ln \frac{A(x, y, z)}{A_0} = k \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2\left(\frac{x-\xi}{k}, \rho\right) \mu(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \quad (4)$$

где k — волновое число; x, y, z — координаты точки наблюдения; ξ, η, ζ — координаты рассеивающего элементарного объема; $\rho^2 = (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$,

$$\Phi_1\left(\frac{x - \xi}{k}, \rho\right) \equiv \frac{k}{2\pi(x - \xi)} \sin \frac{k\rho^2}{x - \xi}; \quad (5)$$

$$\Phi_2\left(\frac{x - \xi}{k}, \rho\right) \equiv \frac{k}{2\pi(x - \xi)} \cos \frac{k\rho^2}{x - \xi}. \quad (6)$$

Условия применимости метода заключаются в требовании малости изменения фазы и относительного изменения амплитуды на длине волны, т. е. менее жесткие, чем в классическом методе малых возмущений, обычно применяемом в задачах о рассеянии.

3. Переходя к статистическому рассмотрению вопроса, будем характеризовать статистические свойства среды корреляционной функцией $R(r)$:

$$R(r) = \overline{\mu_1 \mu_2},$$

где μ_1 и μ_2 — малые отклонения показателя преломления от среднего значения в двух точках на расстоянии r . Черта наверху означает статистическое усреднение.

Формулами (3) и (4) можно пользоваться для выяснения вопроса о корреляции между флуктуациями амплитуды и фазы в точке приема $(L, 0, 0)$. С этой целью перемножим равенства (3) и (4), осредним и, введя безразмерные переменные $\xi' = k\xi, \eta' = k\eta, \zeta' = k\zeta, \rho' = k\rho, L' = kL, r' = kr$, получим:

$$\begin{aligned} & \overline{\left[S' \ln \frac{A}{A_0}\right]_{(L, 0, 0)}} = \\ & = \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(L' - \xi'_1, \rho'_1) \Phi_2(L' - \xi'_2, \rho'_2) R(r') d\xi'_1 d\eta'_1 d\zeta'_1 d\xi'_2 d\eta'_2 d\zeta'_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Переходя к относительным координатам $\eta = \eta'_1 - \eta'_2, \zeta = \zeta'_1 - \zeta'_2$ и координатам центра тяжести $y = \frac{\eta'_1 - \eta'_2}{2}, z = \frac{\zeta'_1 - \zeta'_2}{2}$, можно выполнить интегрирование по переменным y и z . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \overline{\left[S' \ln \frac{A}{A_0}\right]_{(L, 0, 0)}} &= \frac{1}{2} \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2[2L' - (\xi'_1 + \xi'_2), \rho] R(r') d\eta d\zeta d\xi'_1 d\xi'_2 - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2(\xi'_1 - \xi'_2, \rho) R(r') d\eta d\zeta d\xi'_1 d\xi'_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\rho^2 = \eta'^2 + \zeta'^2$. Формула (8) дает общее решение поставленной задачи.

Чтобы воспользоваться ею, необходимо задать корреляционную функцию $R(r')$. Если предположить, например, что она имеет вид

$$R(r') = R_0 e^{-r'^2/a^2} = R_0 e^{-r'^2/k^2 a^2}, \quad (9)$$

где $r'^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \xi = \xi'_1 - \xi'_2$, то после интегрирования в (8) получим:

$$\overline{\left[S' \ln \frac{A}{A_0}\right]_{(L, 0, 0)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{32} R_0 a^3 k^3 \ln \left[1 + \left(\frac{4L}{ka^2}\right)^2\right] \quad (10)$$

и для коэффициента корреляции $R_{a,s}$ на основании (10), (18) и (19)

$$R_{a,s} = \frac{1}{4} \frac{\ln(1 + D^2)}{\sqrt{D^2 - (\arctg D)^2}}, \quad (11)$$

где $D = 4L / ka^2$. На малых дистанциях ($D \ll 1$), когда пригодно лучевое рассмотрение, формула (11) дает

$$R_{a,s} \cong 1/4 \sqrt{3/2} \cong 0,3.$$

На больших дистанциях ($D \gg 1$) формула (11) приобретает вид

$$R_{a,s} = \frac{1}{2} \frac{\ln D}{D},$$

т. е. коэффициент корреляции убывает с дистанцией, стремясь к нулю. Таким образом, корреляция между флуктуациями амплитуды и фазы, существующая на малых дистанциях, исчезает на больших.

4. Переходим к рассмотрению вопроса о корреляции флуктуаций амплитуды (и фазы) в различных точках приема. Предположим, что оба приемника лежат в плоскости $x = L$ на расстоянии l друг от друга.

Координаты приемников, соответственно, $(L, 0, 0)$ и $(L, 0, l)$. Флуктуации амплитуд и фаз определяются формулами (3) и (4) как для первого, так и для второго приемника. Разница только в том, что для первого приемника $\rho_1^2 = \eta_1^2 + \zeta_1^2$, а для второго $\rho_2^2 = \eta_2^2 + (l - \zeta_2)^2$. Корреляционные функции для фаз и амплитуд определяются поэтому следующими формулами:

$$\overline{S'_1 S'_2} = 1/2 (I_1 + I_2); \quad (12)$$

$$\overline{\ln \frac{A_1}{A_0} \ln \frac{A_2}{A_0}} = \frac{1}{2} (I_1 - I_2), \quad (13)$$

где

$$I_1 = \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\xi'_1 - \xi'_2, \rho) R(r') d\eta d\zeta d\xi'_1 d\xi'_2; \quad (14)$$

$$I_2 = \int_0^{L'} \int_0^{L'} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1[2L - (\xi'_1 + \xi'_2), \rho] R(r') d\eta d\zeta d\xi'_1 d\xi'_2; \quad (15)$$

$$\rho^2 = \eta^2 + (\zeta + l')^2, \quad l' = kl.$$

Формулы (12)–(15) дают решение задачи о корреляции фаз (и амплитуд) в различных точках приема в общей форме. Полагая, что корреляционная функция имеет вид (9) и выполняя интегрирование в (14) и (15) в предположении $ka \gg 1$, $L \gg a$, получим:

$$I_1 = \sqrt{\pi} R_0 a k^2 L e^{-\frac{l^2}{a^2}} e^{-\left(\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{ka}\right)^2}; \quad (16)$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{8i} R_0 a^3 k^3 [\text{Ei}(\varepsilon_2) - \text{Ei}(\varepsilon_1)], \quad (17)$$

где $\varepsilon_2 = -\frac{il^2/a^2}{D+i}$; $\varepsilon_1 = \frac{il^2/a^2}{D-i}$; Ei — символ интегральной показательной функции. В частном случае $l = 0$ отсюда вытекают формулы для среднего квадрата флуктуаций амплитуды и фазы, полученные А. М. Обуховым (¹):

$$\overline{S^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} R_0 a k^2 L \left(1 + \frac{1}{D} \arctg D\right), \quad (18)$$

$$\overline{\left(\ln \frac{A}{A_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} R_0 a k^2 L \left(1 - \frac{1}{D} \arctg D\right). \quad (19)$$

Из формул (12), (13), (16), (17), (18) и (19) находим следующее выражение для коэффициента корреляции:

$$R_{a,s} = \frac{e^{-\frac{l^2}{a^2}} e^{-\left(\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{ka}\right)^2} \pm \frac{1}{2iD} [Ei(\varepsilon_2) - Ei(\varepsilon_1)]}{1 \pm \frac{1}{D} \arctg D}, \quad (20)$$

где верхний знак необходимо брать при вычислении коэффициента корреляции R_s для фаз, нижний — при вычислении коэффициента корреляции R_a для амплитуд. Как видно из (20), коэффициент корреляции зависит лишь от трех безразмерных параметров: l/a , D , ka . Для малых и средних дистанций ($D \leq 1$) получим асимптотическое значение $R_{a,s}$ при достаточно большом l/a , если воспользуемся (3) асимптотическим выражением функции Ei :

$$R_{a,s} \cong \frac{e^{-\frac{l^2}{a^2}} e^{-\left(\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{ka}\right)^2} \pm \left[\frac{\sin\left(\frac{l^2}{a^2} \frac{D}{1+D^2}\right)}{\frac{l^2}{a^2} D} + \frac{\cos\left(\frac{l^2}{a^2} \frac{D}{1+D^2}\right)}{\frac{l^2}{a^2}} \right] e^{-\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{1+D^2}}}{1 \pm \frac{1}{D} \arctg D}. \quad (21)$$

Коэффициент корреляции мал по сравнению с единицей ввиду наличия показательных множителей в числителе. Это значит, что корреляция между флуктуациями амплитуды и фазы простирается на расстояние l порядка радиуса корреляции a в среде.

Для больших дистанций ($D \gg 1$) формула (20) приобретает вид

$$R_{a,s} = \frac{e^{-\frac{l^2}{a^2}} e^{-\left(\frac{l^2}{a^2} \frac{1}{ka}\right)^2} \pm \frac{1}{D} \left[\frac{\pi}{2} - Si\left(\frac{1}{D} \frac{l^2}{a^2}\right) \right]}{1 \pm \frac{1}{D} \arctg D}. \quad (22)$$

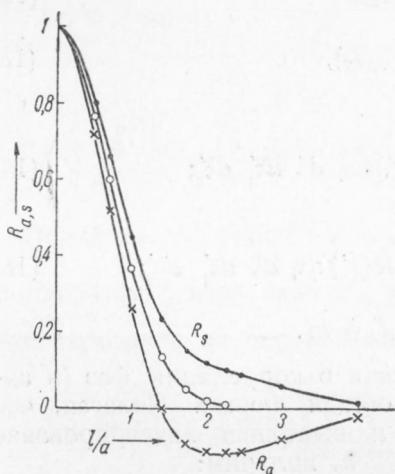


Рис. 1

Зависимость коэффициента корреляции от расстояния l между приемниками изображена графически (см. рис. 1) для случая $D = 10$, $ka = 10^3 - 10^4$. Средняя кривая изображает коэффициент корреляции для показателя преломления согласно (9). Из графика видно, что корреляция между флуктуациями амплитуды и фазы простирается на расстояние порядка радиуса корреляции неоднородностей в среде. К такому же выводу мы пришли, рассматривая малые и средние дистанции.

Считаю своим долгом выразить благодарность Л. М. Бреховских за ценные советы.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступило
19 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2 (1953). ² С. М. Рытов, Изв. АН СССР, сер. физ., № 2 (1937). ³ И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.—Л., 1951, стр. 324.