

А. С. ВИГЛИН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 22 I 1954)

Система уравнений магнитостатики

$$\epsilon_{mns} \frac{\partial H_s}{\partial x_n} = \frac{4\pi}{c} j_m; \quad (1)$$

$$B_s = \mu_{sg} H_g + 4\pi M_{0s}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial B_s}{\partial x_s} = 0 \quad (3)$$

для неограниченной среды не должна быть дополнена граничными условиями. Здесь каждый из индексов может принимать значения 1, 2, 3. По дважды повторяющимся, т. е. по «немым» индексам, понимается суммирование от 1 до 3. ϵ_{mns} — единичный полностью антисимметрический тензор; H_s — компоненты вектора напряженности магнитного поля; B_s — компонента вектора магнитной индукции; M_{0s} — компонента вектора спонтанного намагничивания; μ_{sg} — компонента тензора магнитной проницаемости, который, как известно, симметричен; j_m — компонента вектора плотности тока.

Из (3) следует, что $B_i = \partial F_{ih} / \partial x_h$, где F_{ih} — антисимметрический тензор, определенный с точностью до слагаемого $S_{ih} = \partial R_{ih} / \partial x_s$. Здесь R_{iks} антисимметричен по индексам k и s . Но так как он должен быть, так же как и S_{ih} , антисимметричен по индексам k и i , то R_{iks} полностью антисимметрический тензор и, следовательно, может быть представлен $R_{iks} = \epsilon_{iks} T$, где T — произвольная скалярная функция.

Таким образом, на тензор F_{ih} может быть наложено одно произвольное скалярное условие. Обычно вместо тензора F_{ih} вводят дуальный ему вектор-потенциал A $F_{ih} = \epsilon_{iks} A_s$, на который, так же как и на F_{ih} , может быть наложено одно произвольное скалярное условие. Знание A как функции координат пространства позволяет найти $B_i = \epsilon_{iks} \partial A_s / \partial x_k$, а затем и H . Однако дифференциальное уравнение для A имеет сложный вид и не допускает простого способа решения. Найдем поэтому вместо A другой вектор K , дифференциальное уравнение для которого допускает более простое решение, чем для A . Из (2) находим

$$H_i = \frac{\partial T_{ih}}{\partial x_h} - 4\pi \mu_{ih}^{-1} M_{0h}, \quad (4)$$

где $T_{ih} = \mu_{is}^{-1} F_{sh}$ — асимметрический тензор, имеющий структуру произведения симметрического тензора (μ_{is}^{-1} , так же как и μ_{is} , симметричен) на антисимметрический. Вследствие этого можно положить

$$T_{ik} = P_{is} \mu_{sk}, \quad (5)$$

где P_{is} — новый антисимметрический тензор.

Введем вектор $\mathbf{K}$, дуальный тензору P_{is} :

$$P_{is} = \varepsilon_{isr} K_r. \quad (6)$$

На $\mathbf{K}$ может быть наложено одно произвольное скалярное дополнительное условие, поскольку такое условие может быть наложено на F_{ks} .

Подставляя последовательно (5) в (6), затем в (4) и, наконец, в (1), получаем $\varepsilon_{mnr} \varepsilon_{rst} \mu_{sk} \frac{\partial^2 K_t}{\partial x_k \partial x_n} = \frac{4\pi}{c} j'_m$, где $j'_m = j_m + c \varepsilon_{mnr} \mu_{rs}^{-1} \frac{\partial M_{ns}}{\partial x_n}$ заданная векторная функция от координат точек пространства.

Заметив, что $\varepsilon_{mnr} \varepsilon_{rst} = \delta_{ms} \delta_{nt} - \delta_{mt} \delta_{ns}$ (см., например, (1)), и накладывая на $\mathbf{K}$ дополнительное условие

$$\operatorname{div} \mathbf{K} = 0, \quad (7)$$

получаем

$$\mu_{mn} \frac{\partial^2 K_i}{\partial x_m \partial x_n} = -\frac{4\pi}{c} j'_i. \quad (8)$$

Уравнение (8) после перехода к главным осям тензора μ_{mn} и последующей замены переменных $x_1 = \sqrt{\mu_{11}} y_1$, $x_2 = \sqrt{\mu_{22}} y_2$, $x_3 = \sqrt{\mu_{33}} y_3$ переходит в уравнение Пуассона, решение которого известно. Возвращаясь к произвольным декартовым координатам, получаем

$$K_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{c} \int \frac{j'_i(X_1, X_2, X_3) dX_1 dX_2 dX_3}{V |\mu| \mu_{\alpha\beta} (X_\alpha - x_\alpha)(X_\beta - x_\beta)}, \quad (9)$$

где x_1, x_2, x_3 — компоненты радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки наблюдения, X_1, X_2, X_3 — компоненты радиуса-вектора $\mathbf{R}$ точки источника, а $|\mu|$ — определитель, составленный из компонент тензора μ_{ik} .

Выразим $\mathbf{A}$ через $\mathbf{K}$, для чего подставляем (6) в (5), и учитывая, что кроме того $T_{ik} = \mu_{is}^{-1} F_{sk} = \mu_{is}^{-1} \varepsilon_{skr} A_r$, получаем $\varepsilon_{ikm} A_m = \mu_{tr} \varepsilon_{rsf} K_f \mu_{sk}^{-1}$.

Положив $K_f \equiv \delta_{fn} K_n \equiv \mu_{fm} \mu_{mn}^{-1} K_n$ и принимая во внимание, что $\varepsilon_{rsf} \mu_{rt} \mu_{sk} \mu_{fn} = |\mu| \varepsilon_{tkn}$, получаем

$$A_m = |\mu| \mu_{mn}^{-1} K_n. \quad (10)$$

Подставив (9) в (10), получаем

$$A_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{\mu_{ik}^{-1} V |\mu|}{c} \int \frac{j'_k(X_1, X_2, X_3) dX_1 dX_2 dX_3}{V \mu_{\alpha\beta} (X_\alpha - x_\alpha)(X_\beta - x_\beta)}. \quad (11)$$

В связи с дополнительным условием (7) при помощи (10) находим, что решение (11) имеет место при дополнительном условии

$$\mu_{ik} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = 0, \quad (12)$$

наложенном на вектор-потенциал.

Решение (11) при условии (12) было мною сперва найдено путем сложного решения уравнения для $\mathbf{A}$. Идея приведенного здесь вывода была мне подсказана акад. Л. Д. Ландау, которому я приношу благодарность.

Поступило
11 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 Л. Ландау, Л. Пятагорский, Механика, 1940.