

А. Х. МИРЗАДЖАНЗАДЕ и А. А. МИРЗОЯН

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ТРУБЫ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 26 III 1954)

Расчет начального участка в плоской трубе при движении вязкой жидкости при помощи методов теории пограничного слоя впервые произведен Л. С. Лейбензоном^(1,2). Применим методику Л. С. Лейбензона к случаю движения вязко-пластичной жидкости в плоской трубе (см. рис. 1).

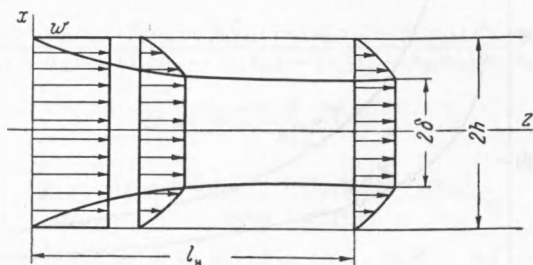


Рис. 1

Будем полагать:

1. Скорость $v(z)$ ненарушенного потока в каждом данном сечении постоянна; вследствие постоянства расхода по мере удаления от входного сечения $v(z)$ возрастает от значения среднеобъемной скорости w до значения скорости ядра (ядро — слой вязко-пластичной жидкости, движущейся с постоянной скоростью) v_0 в конце начального участка.

2. Профиль скоростей в пограничном слое является параболическим и изменяется по закону:

$$v_z = v(z) \left[1 - \left(\frac{x + \delta - h}{\delta} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где $\delta = f(z)$ — толщина пограничного слоя.

При $\delta = h - \delta_1$, $v(z) = v_0$, и формула (1) переходит в формулу, определяющую структурный режим движения вязко-пластичной жидкости в плоской трубе. Из условия постоянства расхода в любом сечении будем иметь

$$\delta = \frac{3h[v(z) - w]}{v(z)}. \quad (2)$$

Изменение количества движения за единицу времени будет

$$\Delta Q = 2b\rho \int_{h-\delta}^h v_z^2 dx + 2b\rho \int_0^{h-\delta} v^2(z) dx = 2b\rho v^2(z) \left(h - \frac{7}{15} \delta \right), \quad (3)$$

где b — ширина трубы.

Сила трения на поверхности трубы определится из выражения:

$$W = 2b \int_0^z \left[-\eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_{x=h} + \tau_0 \right] dz = 2b \int_0^z \left[\frac{2\eta v^2(z)}{3h[v(z) - w]} + \tau_0 \right] dz. \quad (4)$$

Сила давления будет

$$P = bh\rho [v^2(z) - w^2]. \quad (5)$$

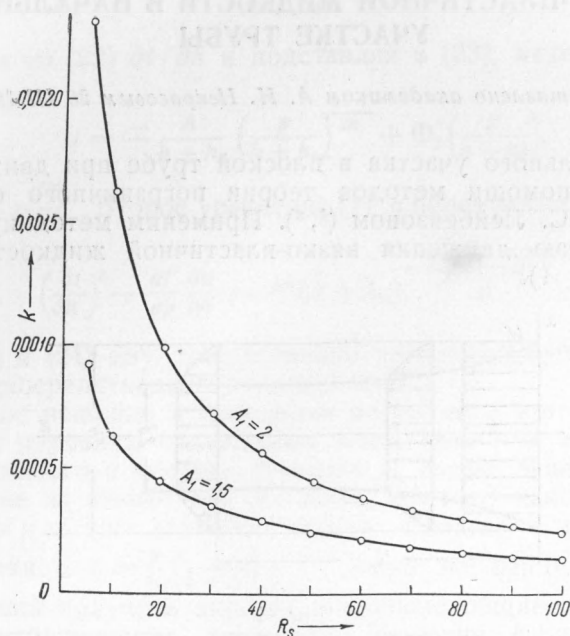


Рис. 2

Применяя теорему об изменении количества движения к массе жидкости, протекающей за единицу времени между входным сечением и сечением, определяемым координатой z , получим:

$$\frac{2}{5} bh\rho [9v(z) - 7w] d[v(z)] = \left[\frac{4b\eta v^2(z)}{3h[v(z) - w]} + 2b\tau_0 \right] dz. \quad (6)$$

Введя вместо $v(z)/w = y$ и учитывая, что при $z = 0$ $y = 1$, получим:

$$\begin{aligned} z &= 0,075 \operatorname{Re} h \int_1^y \frac{9y^2 - 16y + 7}{y^2 + 1,5 R_s y - 1,5 R_s} dy = \\ &= 0,075 \operatorname{Re} h \left[9(y - 1) + A \ln \frac{y - y_1}{1 - y_1} + B \ln \frac{y - y_2}{1 - y_2} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где $\operatorname{Re} = \frac{4wh\rho}{\eta}$ — параметр Рейнольдса; $R_s = \frac{\tau_0 h}{\eta w}$ — параметр Ильюшина; $A = \frac{7 + 13,5 R_s - (16 + 13,5 R_s) y_1}{y_1 - y_2}$; $B = \frac{7 + 13,5 R_s - (16 + 13,5 R_s) y_2}{y_2 - y_1}$.

Длину начального участка определим из условия, что в конце начального участка $z = l_n$, $\delta = h - \delta_1$, а следовательно:

$$y = \frac{3A_1}{2A_1 + 1}, \quad l_n = k \operatorname{Re} h, \quad (8)$$

где $A_1 = h / \delta_1$ — симплекс геометрического подобия; $2\delta_1$ — высота ядра.

На рис. 2 приведена зависимость k от R_s при различных значениях A_1 .

Для определения длины начального участка в круглой трубе при движении вязко-пластичной жидкости применим методику Л. Шиллера⁽³⁾.

В этом случае:

$$z = 0,3 \operatorname{Re} \frac{d}{R_s} \int_2^u \frac{-4u^4 + 11u^3 + 11u^2 - 36u + 4}{(u^2 + 2)^2 \left[\frac{6}{R_s} + (u^2 + 2)(2 - u) \right]} du =$$

$$= 0,3 \operatorname{Re} \frac{d}{R_s} \left[\int_2^u \frac{A}{u - u_1} du + \int_2^u \frac{Bu + C}{u^2 + 2} du + \int_2^u \frac{Du + E}{(u^2 + 2)^2} du + \int_2^u \frac{Fu + K}{u^2 + mu + n} du \right], \quad (9)$$

где $\operatorname{Re} = \frac{wd\rho}{\eta}$ — параметр Рейнольдса; $R_s = \frac{\tau_0 R}{2\eta w}$ — параметр Ильюшина; $u = \sqrt[3]{6 \frac{w}{v(z)} - 2}$;

$$A = \frac{(\alpha_{13}\alpha_{22} - \alpha_{23}\alpha_{12})(\beta_2\alpha_{32} - \beta_3\alpha_{22}) - (\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{33}\alpha_{22})(\beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12})}{(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22})(\alpha_{13}\alpha_{22} - \alpha_{23}\alpha_{12}) - (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})(\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{33}\alpha_{22})};$$

$$B = \frac{\beta_1 - \alpha_{11}A - \alpha_{13}C}{\alpha_{12}};$$

$$C = \frac{\beta_2\alpha_{32} - \beta_3\alpha_{22} - A(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22})}{\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{33}};$$

$$D = -[(n + u_1 m + u_1^2)A + (n - 2)B + mC + 4];$$

$$E = \left[\frac{4}{u_1} + \frac{4}{n}(m + u_1) \right] A + \left(\frac{4}{n} - 2 \right) C + \frac{4m}{n} B - \frac{4}{u_1 n};$$

$$F = -A - B;$$

$$K = -[(m + u_1)A + mB + C];$$

$$\alpha_{11} = (u_1 - m)(n + u_1 m + u_1^2) + \frac{4}{u_1} + \frac{4}{n}(m + u_1);$$

$$\alpha_{12} = m \left(\frac{4}{n} - n \right); \quad \alpha_{13} = n + \frac{4}{n} - m^2 - 4;$$

$$\beta_1 = 11 + \frac{4}{u_1 n} - 4(u_1 - m);$$

$$\alpha_{21} = 4n + (u_1 m - n)(n + u_1 m + u_1^2) + (m - u_1) \left[\frac{4}{u_1} + \frac{4}{n}(m + u_1) \right] + 4u_1(m + u_1);$$

$$\alpha_{22} = 2(n + u_1 m) + (u_1 m - n)(n - 2) + (m - u_1) \frac{4m}{n} - 4;$$

$$\alpha_{23} = 2(n + u_1) + (u_1 m - n)m - u_1 n + (m - u_1) \left(\frac{4}{n} - 2 \right);$$

$$\beta_2 = 11 + \frac{4}{u_1 n} (m - u_1) - 4(u_1 m - n);$$

$$\alpha_{31} = u_1 n (n + u_1 m + u_1^2) + (n - u_1 m) \left[\frac{4}{u_1} + \frac{4}{n} (m + u_1) \right];$$

$$\alpha_{32} = u_1 n (n - 4) + (n - u_1 m) \frac{4m}{n} + 4(u_1 - m);$$

$$\alpha_{33} = \frac{4}{n} (n - u_1 m) + u_1 n m - 4; \quad \beta_3 = \frac{4}{u_1 n} (n - u_1 m) - 4u_1 n - 36.$$

Длину начального участка определим из условия, что в конце начального участка $z = l_n$, $\delta = R - r_0$, а следовательно:

$$u = \frac{A_1 + 1}{A_1},$$

где $A_1 = R/r_0$ — симплекс геометрического подобия. В этом случае длина начального участка будет значительно больше, чем в случае плоской трубы.

Поступило
17 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. С. Лейбензон, Руководство по нефтепромысловой механике, ч. I, Гидравлика, 1931. ² С. М. Тарг, Основные задачи теории ламинарных течений, М.—Л., 1951. ³ Л. Шиллер, Течение жидкостей в трубах, 1936.