

ГИДРОМЕХАНИКА

К. П. СТАНЮКОВИЧ

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ
ДЛЯ ОДНОРАЗМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ
ДЛЯ НЕКОТОРОГО ЗАДАННОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ
ИЛИ ПРОЦЕССА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 18 III 1954)

Рассматривая одномерные адиабатические движения газа, необходимо проинтегрировать систему уравнений, написанную, например, в форме Лагранжа (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial h} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial h} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (1)$$

где $u = dx/dt$ — скорость; p — давление; v — удельный объем; $h = h(s) = \int_0^s \rho_0 dx_0 = \int_0^s \rho dx$ — масса газа, содержащаяся между сечением $x = 0$ и текущим; ρ — плотность газа; s — энтропия; ρ_0 — начальная плотность при $t = 0$.

Уравнение состояния напомним в обычной форме

$$v = \sigma_1(h) = p^{-\frac{1}{k}} \sigma(s) = p^{-\frac{1}{k}} \sigma(h); \quad (2)$$

здесь функция $\sigma_1(h)$, играющая роль переменного коволюма, введена для общности. Очевидно, что

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\sigma(h)}{k} p^{-\frac{k+1}{k}} \frac{\partial p}{\partial t};$$

поэтому, исключая u из уравнений (1), приходим к такому уравнению, определяющему p :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial h^2} = \frac{\sigma(h)}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left[p^{-\frac{k+1}{k}} \frac{\partial p}{\partial t} \right]. \quad (3)$$

Введем вместо лагранжевой координаты h

$$\tau + \tau_0 = \frac{1}{h + h_0}, \quad (4)$$

где τ_0 и h_0 — константы; тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\sigma}{k\tau^4} \frac{\partial}{\partial t} \left[p^{-\frac{k+1}{k}} \frac{\partial p}{\partial t} \right] \quad (5)$$

(здесь мы для краткости опускаем τ_0 и h_0 , помня, что τ и h определяются с точностью до произвольной постоянной). Очевидно, что (5) можно написать в виде:

$$\frac{\partial^2(p\tau)}{\partial\tau^2} = \frac{\sigma}{k\tau^4} \frac{\partial}{\partial t} \left[p^{-\frac{k+1}{k}} \frac{\partial(p\tau)}{\partial t} \right] = \frac{\sigma}{k\tau^{\frac{3k-1}{k}}} \frac{\partial}{\partial t} \left[(p\tau)^{-\frac{k+1}{k}} \frac{\partial(p\tau)}{\partial t} \right]. \quad (6)$$

Пусть теперь

$$\sigma = kA^2\tau^{\frac{3k-1}{k}} = \frac{kA^2}{h^{\frac{k}{k-1}}}, \quad (7)$$

где $A = A(\tau)$. Тогда (6) можно написать окончательно в форме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2} = A^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[z^{-\frac{k+1}{k}} \frac{\partial z}{\partial t} \right], \quad (8)$$

где $z = p\tau = p/h$.

Уравнение (8) можно представить в виде двух уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial\tau} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial\tau} + A^2 z^{-\frac{k+1}{k}} \frac{\partial z}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

где $w = w(t; \tau)$ — новая введенная функция.

Обратив зависимые и независимые переменные, придем, считая, что $\partial(w; z) / \partial(t; \tau) \neq 0$, к уравнениям:

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = \frac{\partial t}{\partial w}; \quad \frac{\partial t}{\partial z} = A^2 z^{-\frac{k+1}{k}} \frac{\partial\tau}{\partial w}. \quad (10)$$

Введем $z = \beta\theta^\alpha$, тогда найдем, что

$$\frac{\partial\tau}{\partial\theta} = \beta\alpha\theta^{\alpha-1} \frac{\partial t}{\partial w}, \quad \frac{\partial\tau}{\partial w} = \frac{\theta^{1+\frac{\alpha}{k}} \beta^{\frac{1}{k}}}{A^2\alpha} \frac{\partial t}{\partial\theta}. \quad (11)$$

Исключая τ , полагая $A = \text{const}$, придем к уравнению:

$$\beta^{\frac{k-1}{k}} \alpha^2 A^2 \theta^{\alpha \frac{k-1}{k} - 2} \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial\theta^2} + \frac{1 + \frac{\alpha}{k}}{\theta} \frac{\partial t}{\partial\theta}. \quad (12)$$

Полагая, что $\alpha = \frac{2k}{k-1}$, $\beta = \left(\frac{k-1}{2kA} \right)^{\frac{2k}{k-1}}$, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 t}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial\theta^2} + \frac{k+1}{(k-1)\theta} \frac{\partial t}{\partial\theta}. \quad (13)$$

Решение этого уравнения, если $k = \frac{2n+3}{2n+1}$, где $n = -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, общеизвестно:

$$t = \frac{\partial^{n+1}}{\partial\theta^{2(n+1)}} [F_1(\theta + w) + F_2(\theta - w)], \quad (14)$$

или

$$t = \frac{\partial^{n+1}}{\partial\omega^{n+1}} [F_1(\sqrt{\omega} + w) + F_2(\sqrt{\omega} - w)], \quad (15)$$

или

$$t = \frac{\partial^n}{\partial\omega^n} \frac{\Phi_1(\sqrt{\omega} + w) + \Phi_2(\sqrt{\omega} - w)}{\sqrt{\omega}}, \quad (15a)$$

где $\omega = \theta^2$.

Выражая новые переменные через старые, придем к соотношениям:

$$z = \left(\frac{k-1}{2k} - \frac{\theta}{A} \right)^{\frac{2k}{k-1}} = \left(\frac{k-1}{2k} - \frac{V\omega}{A} \right)^{\frac{2k}{k-1}} = p(\tau + \tau_0) = \frac{p}{n + h_0}$$

или

$$\theta = \frac{2kA}{k-1} z^{\frac{k-1}{2k}}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{h^2 \partial z}{\partial h} = h \frac{\partial p}{\partial h} - p \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\left(h \frac{\partial u}{\partial t} + p \right).$$

При этом уравнение состояния будет иметь вид

$$p = \frac{(kA^2)^k}{(v - \sigma_1(h))^k (h + h_0)^{3k-1}} = \frac{A_0}{(v - \sigma_1(h))^k \left(1 + \frac{h}{h_0}\right)^{3k-1}}, \quad (17)$$

где $A_0 = \frac{(kA^2)^k}{h_0^{3k-1}}$. Здесь мы вводим константу h_0 ; очевидно, что, вы-

бирая соответствующим образом значение этой константы, можно с достаточной степенью точности аппроксимировать зависимость между энтропией и h или x_0 на фронте любой ударной волны.

Общее решение задачи должно содержать три функции, мы же нашли решение, зависящее от двух произвольных функций и одной произвольной константы, однако это решение можно назвать общим, поскольку для целей практики выбор константы h_0 действительно позволит хорошо изобразить зависимость $s = s(x_0) = s(h)$ на фронте волны для любых ударных волн, как сильных, так и слабых. Функцию $\sigma_1(h)$ при этом можно для изучения ударных волн в газах положить равной нулю или же выбирать ее таким образом, чтобы улучшить аппроксимацию $s = s(x_0) = s(h)$ на фронте любой волны.

Для уравнения процесса (17) решение в точном смысле является общим. Также можно говорить о решении (14) как о точном и общем, если считать, что ударная адиабата Гюгоньо аппроксимируется несколько иначе, чем обычно.

Зная $t = t(z; w)$, легко из первого соотношения (10) найти $\tau = \tau(z; w)$, после чего, исключая из этих соотношений w , можно найти

$$z = z(t, \tau); \quad p = hz(t; h), \quad (18)$$

после чего из первого соотношения (1) легко определяется u , что и дает окончательное решение поставленной задачи.

Перейдем к изучению особых решений системы (8), описывающих бегущие ударные волны.

Полагая $\frac{\partial(w; z)}{\partial(t; \tau)} = 0$ и используя уравнения (9), найдем, что

$$Az^{-\frac{k+1}{2k}} \frac{\partial z}{\partial t} \pm \frac{\partial z}{\partial \tau} = 0. \quad (19)$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial \theta}{\partial t} \pm \frac{\partial z}{\partial \tau} = 0$ и $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \pm \frac{\partial w}{\partial t}$; далее, из условия (19) будем иметь, что $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \pm \frac{\partial w}{\partial \tau}$, и окончательно, что $d\theta = \pm dw$, т. е. что

$$\theta = \pm w + \text{const}. \quad (20)$$

Решение уравнения (19) имеет вид

$$A\tau = \pm z^{\frac{k+1}{2k}} t + F(z) = \pm \left(\frac{k-1}{2k} \frac{\theta}{A} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} t + F(\theta). \quad (21)$$

Поскольку $z = p(\tau + \tau_0) = \frac{p}{h + h_0}$, то окончательно будем иметь

$$t = \pm \frac{A}{p} \left(\frac{p}{h + h_0} \right)^{\frac{k-1}{2k}} + \Phi_1 \left(\frac{p}{h + h_0} \right). \quad (22)$$

Поскольку из первого уравнения (1), переходя к независимым переменным $(p; h)$, будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial t}{\partial h}, \quad (23)$$

то, определяя из (22) $\partial t / \partial h$ и подставляя в (23), интегрируя, найдем

$$u = \mp \frac{A}{h + h_0} \left(\frac{p}{h + h_0} \right)^{\frac{k-1}{2k}} + \Phi_2 \left(\frac{p}{h + h_0} \right), \quad (24)$$

где $\frac{d\Phi_2}{dz} = -z \frac{d\Phi_1}{dz}$. Второе уравнение (1) в переменных $(p; h)$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial t}{\partial h} \right)^2 - \frac{\partial t}{\partial p} \frac{\partial u}{\partial h} = A^2 (h + h_0)^{-\frac{3k-1}{k}} p^{-\frac{k+1}{k}}. \quad (25)$$

Решения (22) и (24) ему тождественно удовлетворяют, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой.

Зная особое решение и определяя вдоль него θ и ω , затем можно переходить к изучению отраженных волн, зная θ и ω вдоль линии сопряжения общего и особого решения, а также задавая какое-либо второе условие на стенке или же вдоль другого какого-либо известного решения для уже заданной волны. Полагая в пределе $h_0 \rightarrow \infty$ (написав z в виде $z = \frac{p}{h_0} \left(\frac{1}{1 + h/h_0} \right)$), легко из найденных общих и особых решений получить хорошо известные общие и особые решения для изэнтропических движений. Значение h_0 определяет силу ударной волны, при $h_0 \rightarrow 0$ волна является сколь угодно сильной, при $h_0 \rightarrow \infty$ ударная волна переходит в обычную волну сжатия, на фронте которой энтропия не возрастает. Найденные решения описывают также движения среды, плотность которой переменна.

Поступило
15 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Р. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИЛ, 1950.