

ГИДРОМЕХАНИКА

Д. Е. ДОЛИДЗЕ

**ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ  
ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ \***

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 18 III 1954)

В статье <sup>(1)</sup> я доказал теорему единственности основной граничной задачи для линейных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости. В настоящей работе рассмотрим вопрос единственности для нелинейных уравнений.

Рассмотрим неустановившееся движение вязкой несжимаемой жидкости в области  $D$ , ограниченной твердой кусочно-гладкой поверхностью  $\sigma$ .

Вектор скорости  $\mathbf{v}$  и давление  $p$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  — время,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{F}$  — массовая сила,  $\Delta$  — оператор Лапласа относительно координат,  $\mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v}$  — скалярное произведение вектора  $\mathbf{v}$  на тензор  $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ , компоненты которого суть  $\partial v_i / \partial x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ;  $i = 1, 2, 3$ ).

При этом задаются следующие предельные условия: в начальный момент скорость задана внутри области, а при  $t > 0$  она на границе принимает заданные непрерывные значения. Если  $D$  — внешняя область, то скорость должна еще удовлетворять заданному условию на бесконечности. Мы докажем, что вектор скорости  $\mathbf{v}$ , удовлетворяющий дифференциальным уравнениям (1) и заданным условиям, может быть только единственным. Рассматриваемое решение будем считать регулярным в  $D$  в обычном смысле, а первые производные компонентов скорости по координатам — непрерывными вплоть до границы.

Допустим, что рассматриваемая нами гидродинамическая задача имеет два решения:  $\mathbf{v}_1, p_1$  и  $\mathbf{v}_2, p_2$ . Подставляя эти значения в уравнения движения, после вычитания для разности решений

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \quad q = p_1 - p_2$$

получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} q + \mathbf{v}_1 \operatorname{grad} \mathbf{u} + \mathbf{u} \operatorname{grad} \mathbf{v}_2, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и нулевые предельные значения для  $\mathbf{u}$ .

\* Доложено Всесоюзному совещанию по гидроаэромеханике в декабре 1952 г.

Если мы докажем, что вектор  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющий системе (2), обращающийся в нуль в начальный момент, на граничной поверхности и на бесконечности, тождественно равен нулю, то этим единственность скорости будет доказана.

Умножим скалярно на  $\mathbf{u}$  обе части первого равенства (2), получим

$$\mathbf{u} \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \mathbf{u} \operatorname{grad} q + \mathbf{u} (\mathbf{v}_1 \operatorname{grad} \mathbf{u}) + \mathbf{u} (\mathbf{u} \operatorname{grad} \mathbf{v}_2). \quad (3)$$

В силу уравнения неразрывности будем иметь

$$\mathbf{u} \operatorname{grad} q = \operatorname{div} q \mathbf{u}. \quad (4)$$

Далее, легко показать, что между тремя произвольными непрерывными векторами  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  существует следующая тождественная зависимость:

$$\mathbf{a} (\mathbf{b} \operatorname{grad} \mathbf{c}) + \mathbf{c} (\mathbf{b} \operatorname{grad} \mathbf{a}) = \operatorname{div} (\mathbf{a} \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \mathbf{c}) \operatorname{div} \mathbf{b}. \quad (5)$$

Воспользовавшись последним тождеством, в силу второго уравнения системы (1) можем написать

$$\mathbf{u} (\mathbf{v}_1 \operatorname{grad} \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \operatorname{div} u^2 \mathbf{v}_1. \quad (6)$$

На основании формул (4) и (6) уравнение (3) перепишется в виде:

$$\mathbf{u} \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \frac{q}{\rho} \mathbf{u} + \frac{u^2}{2} \mathbf{v}_1 \right) + \mathbf{u} (\mathbf{u} \operatorname{grad} \mathbf{v}_2). \quad (7)$$

Рассмотрим случай внутренней области. От обеих частей равенства (7) возьмем интеграл по области  $D$  и заметим, что применением формул Гаусса — Остроградского и Грина, в силу нулевого граничного значения вектора  $\mathbf{u}$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \int_D \mathbf{u} \Delta \mathbf{u} dD &= - \int_D \sum_i \operatorname{grad}^2 u_i dD, \\ \int_D \operatorname{div} \left( \frac{q}{\rho} \mathbf{u} + \frac{u^2}{2} \mathbf{v}_1 \right) dD &= 0, \end{aligned}$$

и получим

$$\frac{d}{dt} \int_D u^2 dD + 2\nu \int_D \sum \operatorname{grad}^2 u_i dD = - 2 \int_D \mathbf{u} (\mathbf{u} \operatorname{grad} \mathbf{v}_2) dD. \quad (8)$$

$\int_D u^2 dD$  равняется нулю в начальный момент, а в последующем не может быть отрицательным, поэтому его производная по времени должна быть неотрицательной. Учитывая, что  $\nu > 0$ , согласно формуле (8) можем написать

$$\frac{d}{dt} \int_D u^2 dD \leq 2 \left| \int_D \mathbf{u} (\mathbf{u} \operatorname{grad} \mathbf{v}_2) dD \right| \leq 6M \int_D u^2 dD, \quad (9)$$

где  $M$  — максимум абсолютных значений векторов  $\operatorname{grad} v_{2i}$ . Отсюда видно, что  $\int_D u^2 dD$  не может с течением времени меняться быстрее, чем в том случае, когда он удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt} \int_D u^2 dD = 6M \int_D u^2 dD.$$

Интеграл последнего уравнения дает

$$\int_D u^2 dD = Ce^{6Mt},$$

откуда вытекает  $u = 0$  тождественно.

Приведенное доказательство можно обобщить и на случай внешней бесконечной области. Для этого заметим, что без ограничения общности вопроса скорость на бесконечности можем считать равной нулю. В самом деле, если  $\mathbf{v}_\infty(t) \neq 0$  и представить вектор скорости в виде суммы  $\mathbf{v} + \mathbf{v}_\infty$ , то в правую часть уравнения (3) войдет дополнительное слагаемое  $\mathbf{u}(\mathbf{v}_\infty \text{grad } \mathbf{u})$ , уравнение неразрывности останется без изменения, а на бесконечности  $\mathbf{v}$  будет обращаться в нуль. Согласно тождеству (5) будем иметь

$$\mathbf{u}(\mathbf{v}_\infty \text{grad } \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \text{div } u^2 \mathbf{v}_\infty,$$

и под операцией расхождения в правой части равенства (7) войдет дополнительное слагаемое  $\frac{1}{2} u^2 \mathbf{v}_\infty$ .

Потребуем теперь, чтобы на бесконечности удовлетворялись следующие условия затухания:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1+\alpha} v_i = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1+\alpha} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r q = 0, \quad (10)$$

где  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ,  $r$  — расстояние от начала координат. В случае двухмерного движения можно взять  $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ .

При соблюдении условий (10) доказательство теоремы получим обычным переходом от конечной области к бесконечной.

Если  $\sigma$  — разомкнутая поверхность конечных размеров, то можем ее замкнуть гладкой поверхностью  $\sigma_0$  и, беря интегралы по внутренней и внешней областям  $D_+$  и  $D_-$ , в силу непрерывности  $v_i$  и их производных, на  $\sigma_0$  опять получим равенство (8), где  $D = D_+ + D_-$ . Если же разомкнутая поверхность  $\sigma$  содержит бесконечно удаленные точки, то возьмем интеграл по области, ограниченной частью  $\sigma$  и сферой радиуса  $R$ , а затем перейдем к пределу при  $R \rightarrow \infty$ .

Тбилисский математический институт  
им. А. М. Размадзе  
Академии наук Груз.ССР

Поступило  
1 III 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Д. Е. Долидзе, Прикладн. матем. и мех., 11, в. 2 (1947).