

МАТЕМАТИКА

О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

О РЕШЕНИИ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ДИФФРАКЦИИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 III 1954)

Задачи диффракции с точки зрения математики состоят в решении задачи Коши или краевой задачи для какого-либо уравнения (или системы), коэффициенты которого могут терпеть разрывы первого рода. При этом предельные значения искомого решения и его производных по разные стороны поверхностей разрыва коэффициентов должны быть согласованы тем или иным способом. В основном рассматривались следующие задачи:

1. Определение решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \Delta u + f, \quad (1)$$

где a — кусочно-постоянная функция, по начальным и граничным условиям в конечной или бесконечной области. При этом, если коэффициент a терпит разрыв на какой-либо поверхности F , то при переходе через нее решение u должно быть непрерывным, а предельные значения на F его производной по направлению нормали $\mathbf{n}$ к F должны удовлетворять равенству

$$b_1 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_F^+ = b_2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_F^-, \quad (2)$$

где b_i — заданные постоянные, чаще всего равные значениям a по ту и другую сторону F *.

2. Соответствующая задаче 1 стационарная задача (с тем или иным дополнительным условием на бесконечности в случае бесконечной области).

3. Аналогичные задачам 1 и 2 задачи для системы уравнений теории упругости. В них на границе двух разнородных сред требуется равенство смещений и поверхностных натяжений.

Мы не имеем возможности указать здесь всю ту огромную литературу, которая посвящена этим задачам. Отметим лишь, что вопрос о существовании решения и его определении в нестационарных задачах решен только для случая одной среды (т. е. непрерывных коэффициентов; см. (1, 2)) для частных случаев уравнений и поверхностей F раздела разнородных сред. В стационарном же случае найдено решение задачи для уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$, если k^2 — кусочно-постоянная функция, терпящая разрыв на кусочно-гладкой замкнутой поверхности F . Для нахождения решения задачи типа 2 для эллиптических уравнений общего вида с разрывными коэффициентами можно легко приспособить (во всяком случае, для ограниченной области) известные методы — прямые методы вариационного исчисления, метод конечных разностей, метод прямых разложений,

* К этому же случаю сводится задача, в которой условия согласования имеют вид (2) и $c_1(u)_F^+ = c_2(u)_F^-$, где $c_i = \text{const}$.

разумно расширив сначала понятие решения диффракционной задачи. Мы рассматриваем здесь, в основном, нестационарные задачи, а для стационарных задач дадим лишь определение обобщенных решений в случае конечной области.

Рассмотрим сначала задачу типа 1. Пусть в области Ω пространства $X = (x_1, \dots, x_n)$ (конечной или бесконечной) с границей S произвольного вида задано гиперболическое уравнение

$$\rho(X) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(X) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a(X, t) u + f(X, t), \quad (3)$$

коэффициенты a_{ij} и ρ ($\rho \geq \rho_0 > 0$) которого суть кусочно-непрерывные функции, имеющие лишь разрывы первого рода, расположенные на поверхностях F пространства X^* ; коэффициент $a(X, t)$ есть измеримая, ограниченная функция, а $f(X, t) \in L_2(Q')$, где Q' — произвольный конечный цилиндр $\Omega' \times [0, t_1]$ с $\Omega' \subset \Omega$. При $t=0$ заданы начальные условия

$$u|_{t=0} = \varphi_0(X), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_1(X), \quad (4)$$

а на S граничное условие

$$u|_S = 0 \quad (5)$$

(или $\frac{\partial u}{\partial N}|_S = 0$). От искомого решения требуется, чтобы оно удовлетворяло в каком-то смысле (3), (4), (5), и на F условиям сопряжения

$$(u)_F^+ = (u)_F^-, \quad \left(b \frac{\partial u}{\partial N}\right)_F^+ = \left(b \frac{\partial u}{\partial N}\right)_F^-, \quad (6)$$

где $b(X)$ есть кусочно-постоянная функция, могущая терпеть разрыв первого рода на F , а $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\mathbf{n}, x_i)$ **.

Будем считать $\varphi_0(X) \in W_2'(\Omega')$, а $\varphi_1(X) \in L_2(\Omega')$. Назовем обобщенным решением диффракционной задачи (3) — (6) функцию $u \in W_2'(Q')$, равную $\varphi_0(X)$ при $t=0$ и нулю на S и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^{t_1} \int_{\Omega'} \left\{ b \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - b \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + b a u \Phi + b f \Phi \right\} dX dt + \int_Q \varphi_1 \Phi|_{t=0} dX = 0 \quad (7)$$

при любой $\Phi \in W_2'(Q')$, равной нулю на верхнем основании и боковой поверхности цилиндра $Q' = \Omega' \times [0, t_1]$.

Ради краткости изложения предположим, что $a(X)$ и f кусочно-непрерывны. Обобщенное решение найдем при помощи конечных разностей по такой же схеме, как в книге (2) (гл. III, §§ 1, 2, 5) в случае непрерывных коэффициентов. Именно, уравнение (3) заменим разностным

$$b \rho u_{\bar{t}\bar{t}} = \sum_{i,j} (b a_{ij} u_{x_i})_{\bar{x}_j} + b a u + b f, \quad (8)$$

предварительно доопределив каким-либо образом коэффициенты на поверхностях разрыва так, чтобы они оставались ограниченными.

* Никаких условий гладкости на F не накладывается, лишь бы ее n -мерный объем был равен нулю; но по физической сущности задачи F состоит из замкнутых компонент, разбивающих все Ω на отдельные области.

** Если $b \equiv 1$, то поверхности F могут быть и не замкнутыми.

Все дальнейшие вычисления и необходимые доказательства проведем затем так же, как и в обычной смешанной задаче в (2), и установим, что разностный процесс сходится, если $\Delta t / \Delta x$ не превосходит некоторой постоянной, определяемой коэффициентами a_{ij} . Заметим, что все эти рассуждения сохраняют свою силу и тогда, когда коэффициенты в (3) зависят и от t .

Имеет место теорема единственности такого обобщенного решения. Классическое решение задачи (3) — (6) будет обобщенным. Наоборот, если обобщенное решение имеет производные второго порядка из $L_2((\Omega - F) \times [0, t_1])$, то оно удовлетворяет всем условиям (3) — (6).

Для стационарных задач диффракции в случае конечной области Ω обобщенное решение вводим также при помощи тождества (7), из которого выброшены производные по t и начальные условия.

Для уравнений теории упругости

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{ik}(u)}{\partial x_k} + f_i(X, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (9)$$

где $\tau_{ik}(u) = 2\mu \varepsilon_{ik}(u) + \delta_{ik}^h \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\varepsilon_{ik}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$,

а μ , λ и ρ — кусочно-постоянные функции с разрывами первого рода на F . Условия сопряжения на F обычно берут в виде

$$(\mathbf{u})_F^+ = (\mathbf{u})_F^-, \quad (\mathbf{t}(u))_F^+ = (\mathbf{t}(u))_F^-, \quad (10)$$

где $\mathbf{t}(u) = \sum_{i,k=1}^3 \tau_{ik}(u) \cos(\mathbf{n}, x_k) \mathbf{x}_i^0$, $\mathbf{x}_i^0$ — орты, а $\mathbf{n}$ — нормаль к F .

Мы опять заменим удовлетворение уравнению (2), условиям (10) и второму из начальных условий

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \vec{\varphi}^0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \vec{\varphi}' \quad (11)$$

требованием, чтобы $\mathbf{u}$ принадлежало $W_2''(Q')$ и удовлетворяло интегральному тождеству

$$\int_0^{t_1} \int_{\Omega} \left[\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} - \sum_{i,k} \tau_{ik}(u) \varepsilon_{ik}(\vec{\Phi}) + \mathbf{f} \vec{\Phi} \right] dX dt + \int_{\Omega} \rho \vec{\varphi}' \vec{\Phi} \Big|_{t=0} dX = 0 \quad (12)$$

для любого вектора $\vec{\Phi} \in W_2''(Q')$, равного нулю для $t \geq t_1$ и на боковой поверхности Q' . При наличии границы S следует удовлетворить и граничным условиям: условие $\mathbf{u}|_S = 0$ должно выполняться в смысле принадлежности к $\bar{D}_1$ (см. (2)), условие же $\mathbf{t}(u)|_{S_1} = 0$ заменяется требованием, чтобы (12) имело место не только для всех указанных $\vec{\Phi}$, но и для всех тех, которые принадлежат $W_2''(Q')$, равны нулю для $t \geq t_1$ и равны нулю на боковой поверхности Q' за исключением той ее части, которая принадлежит $S_1 \times [0, t_1]$. Решение этой задачи может быть получено при помощи конечных разностей примерно так же, как и в предыдущей задаче. Систему (9) следует заменить конечноразностной так:

$$\rho u_{it\bar{t}} = \sum_{i,k=1}^3 (\tau_{ik}^h(u))_{x_k} + f_i, \quad (13)$$

где $\varepsilon_{ik}^h(u) = \frac{1}{2} (u_{i,x_k} + u_{k,x_i})$, а связь между ε_{ik}^h и ε_{ik}^h та же, что и в (9), причем ρ , λ и μ надо доопределить на F так же, как и в задаче (1).

Вычисление приближенных решений u^n при помощи (13) проводится совсем элементарно, не требуя даже решения алгебраических систем. Доказывается, что u^n сходятся к искомому решению, если $\Delta t/\Delta x$ меньше некоторой постоянной. Можно ввести в задачу (9) — (11) разрывный коэффициент подобно тому, как мы это сделали в задаче (3) — (6). Можно также рассмотреть и анизотропные среды в теории упругости.

Нам кажется, что данный здесь подход к решению диффракционных задач перспективен и в практическом отношении. Однако для решения этих задач относительно угла, сферы и других конкретных тел желательно разработать более совершенные разностные схемы, приспособленные к форме этих тел, а не пользоваться непременно указанной здесь схемой, которую мы предпочли, в основном, из теоретических соображений.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
2 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа к математической физике, 1950. ² О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, 1953.