

В. И. КРЫЛОВ

УВЕЛИЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР

ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРОВА ВИДА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 III 1954)

Во многих применениях механических квадратур возникает потребность в проверке точности полученного результата и, если точность окажется недостаточной, то в ее увеличении. В настоящем сообщении будет рассматриваться задача об увеличении точности при некоторых частных предположениях о механической квадратуре.

Пусть значение интеграла $\int_a^b p(x)f(x)dx$ приближенно вычисляется путем замены его квадратурной суммой $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$. Рассмотрим остаток механической квадратуры

$$R(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (1)$$

Увеличить точность квадратуры — это значит выделить из остатка R часть, которую при тех или иных условиях можно считать главной, и добавить ее к квадратурной сумме. Мы будем исходить из представления остатка более удобного, нежели (1), для выделения главной части.

Пусть степень точности квадратуры равна $m-1$ *. Если f m -кратно непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то, как известно ⁽¹⁾, остаток квадратуры R представим в форме

$$R(f) = \int_a^b f^{(m)}(x)K(x)dx, \quad (2)$$

где K — некоторая функция, не зависящая от f и $m-1$ раз кусочно-непрерывно дифференцируемая. Ниже мы будем называть K ядром остатка. В (2) $f^{(m)}$ и K входят равноправно и могут быть построены способы выделения из (2) главной части, основанные как на свойствах $f^{(m)}$, так и на свойствах K . В зависимости от этого мы будем получать способы увеличения точности, рассчитанные либо на специальные классы функций, либо на специальные классы квадратурных формул. Мы остановимся исключительно на способах, основанных на свойствах ядра.

В настоящем сообщении будет рассматриваться способ увеличения точности, основанный на наглядных соображениях. Последовательное применение их приводит к формулам, аналогичным широко известной формуле Эйлера — Маклорена, мы будем называть их поэтому фор-

* Если квадратурная формула верна для $f = x^i$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$) и не верна для $f = x^m$, то $m-1$ называют алгебраической степенью точности формулы.

мулами эйлера вида. Найденные правила увеличения точности могут применяться в широком классе случаев, независимо от наглядных соображений, при помощи которых они получены. Сами же наглядные соображения могут оказать пользу при выяснении условий, при которых формулам эйлера вида следует отдать предпочтение перед другими правилами увеличения точности квадратуры.

Отрезок интегрирования $[a, b]$ будем считать конечным. Когда ядро K есть «мало изменяющаяся» функция, то главной частью значений ядра, оказывающей наибольшее влияние на образование интеграла (2), будет среднее значение K . Чтобы выделить из осадка R главную часть, достаточно положить

$$K(x) = C_0 + [K(x) - C_0], \quad \text{где } C_0 = (b-a)^{-1} \int_a^b K(x) dx;$$

$$\begin{aligned} R(f) &= C_0 \int_a^b f^{(m)} dx + \int_a^b f^{(m)} [K - C_0] dx = \\ &= C_0 [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \int_a^b f^{(m+1)} L_1 dx; \end{aligned} \quad (3)$$

$$L_1(x) = \int_a^x [C_0 - K(t)] dt. \quad (4)$$

Если f $m + s + 1$ раз непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то многократное применение (3) к выделению из остатка R последовательных главных частей приводит к следующей квадратурной формуле эйлера вида:

$$\begin{aligned} \int_a^b pf dx &= \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C_0 [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \dots \\ &\dots + C_s [f^{(m+s-1)}(b) - f^{(m+s-1)}(a)] + R_{s+1}(f); \end{aligned} \quad (5)$$

$$C_i = (b-a)^{-1} \int_a^b L_i dx; \quad L_{i+1}(x) = \int_a^x [C_i - L_i(t)] dt;$$

$$R_{s+1}(f) = \int_a^b f^{(m+s+1)}(x) L_{s+1}(x) dx.$$

Можно показать, что коэффициенты ее C_i имеют значения*:

$$C_i = \frac{(b-a)^{i-1}}{i!} \int_a^b B_i \left(\frac{x-a}{b-a} \right) K(x) dx = \frac{(b-a)^{m+i-1}}{(m+i)!} R \left[B_{m+i} \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right]$$

и являются, следовательно, остатками квадратуры многочленов $\frac{(b-a)^{m+i-1}}{(m+i)!} B_{m+i} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)$.

* B_k — числа Бернулли, $B_k(x)$ — многочлены Бернулли и $\mathcal{B}_k(x)$ — 1-периодическая функция, совпадающая с $B_k(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Отметим попутно, что возможность построения формул эйлера вида для частного случая интеграла с постоянной весовой функцией $p(x)$ легко вытекает из известного представления произвольной функции через многочлены Бернулли ((2) , п^о 13.5).

Ядро дополнительного члена R_{s+1} формулы (5) представимо в форме, позволяющей в некоторых случаях оценить R_{s+1} с достаточно хорошей точностью:

$$L_{s+1}(t) = \frac{(b-a)^s}{(s+1)!} \int_a^b \left[\mathcal{B}_{s+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - \mathcal{B}_{s+1}\left(\frac{x-t}{b-a}\right) \right] K(x) dx = \\ = \frac{(b-a)^{m+s}}{(m+s+1)!} R \left[\mathcal{B}_{m+s+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - \mathcal{B}_{m+s+1}\left(\frac{x-t}{b-a}\right) \right].$$

Пусть $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ($\alpha, \beta > -1$). Рассмотрим квадратурную формулу наивысшей степени точности $2n-1$ с n узлами, расположенными в нулях якобиевого многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ степени n .

Формула эйлера вида для нее будет

$$I(f) = \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta f(x) dx \sim \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \\ + C_0 [f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(-1)] + C_1 [f^{(2n)}(1) - f^{(2n)}(-1)] + \dots$$

Коэффициенты ее

$$C_i = \frac{2^{2n+i-1}}{(2n+i)!} R \left[B_{2n+i}\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]$$

можно вычислить, например, следующим путем. Выполняя деление $B_{2n+i}\left(\frac{x+1}{2}\right)$ на $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, мы представим $B_{2n+i}\left(\frac{x+1}{2}\right)$ в форме

$$B_{2n+i}\left(\frac{x+1}{2}\right) = r_{2n-1}(x) + P_n^{(\alpha, \beta)}(x) Q_i(x),$$

где r_{2n-1} и Q_i — некоторые многочлены степеней не больше $2n-1$ и i , соответственно. Тогда

$$R \left[B_{2n+i}\left(\frac{x+1}{2}\right) \right] = I[P_n^{(\alpha, \beta)} Q_i];$$

$$C_i = \frac{2^{2n+i-1}}{(2n+i)!} \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)} Q_i dx;$$

$$C_0 = \frac{2^{\alpha+\beta+2n} n!}{(2n)! (\alpha+\beta+2n+1)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1) \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma^2(\alpha+\beta+2n+1)};$$

$$C_1 = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2n} \left[\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+2n+2} + 2n \right] \frac{n! 2^{\alpha+\beta+2n}}{(2n+1)!} \times \\ \times \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1) \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

Для ультрасферического случая $\beta = \alpha$ коэффициенты C нечетных индексов все равны нулю и

$$C_0 = \frac{2^{2\alpha} n!}{(2n)!} \frac{\Gamma(2\alpha+n+1)}{2\alpha+2n+1} \left[\frac{2^n \Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(2\alpha+2n+1)} \right]^2;$$

$$C_2 = \frac{2^{2\alpha+2n} n!}{(2n+2)!} \frac{\Gamma(2\alpha+n+1) \Gamma^2(\alpha+n+1)}{\Gamma^2(2\alpha+2n+1)} \left[\frac{2n^2 + 2(2\alpha+1)n + 2\alpha - 1}{(2\alpha+2n-1)(2\alpha+2n+1)(2\alpha+2n+3)} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{(2\alpha+2n-1)(2\alpha+2n+1)} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3(2\alpha+2n+1)} \right].$$

В частности, для гауссовой формулы, узлы которой располагаются в нулях многочлена Лежандра, формула эйлера вида будет

$$\int_{-1}^{+1} f dx \sim \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \frac{1}{(2n+1)!} \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right]^2 [f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(-1)] +$$

$$+ \frac{1}{(2n+2)!} \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right]^2 \left[\frac{2n^2 + 2n - 1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{n+1}{3} \right] [f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(-1)] + \dots$$

Мы укажем еще на формулы эйлерова вида, соответствующие нескольким первым формулам Котеса. Несмотря на то, что все они могут быть получены простым путем из теории многочленов Бернул-ли, автор считал возможным привести их, так как они, повидимому, могут служить полезным добавлением к формуле Эйлера — Маклорена. Автору неизвестно, применялись ли они раньше в вычислитель-ной практике.

1. Случай трех ординат (правило Симпсона):

$$\int_0^{2h} f(x) dx \sim \frac{h}{3} [f(0) + 4f(h) + f(2h)] -$$

$$- \sum_{i=0} \frac{2^{4+2i} h^{4+2i} B_{4+2i}}{3(4+2i)!} (1 - 2^{-2-2i}) [f^{(3+2i)}(2h) - f^{(3+2i)}(0)] =$$

$$= \frac{h}{3} [f(0) + 4f(h) + f(2h)] - \frac{h^4}{180} [f^{(3)}(2h) - f^{(3)}(0)] +$$

$$+ \frac{h^6}{1512} [f^{(5)}(2h) - f^{(5)}(0)] - \frac{h^8}{1440} [f^{(7)}(2h) - f^{(7)}(0)] + \dots$$

2. Случай четырех ординат (правило $\frac{3}{8}$ Ньютона):

$$\int_0^{3h} f(x) dx \sim \frac{3h}{8} [f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h)] +$$

$$+ \sum_{i=0} \frac{3^{4+2i} h^{4+2i} B_{4+2i}}{8(4+2i)!} (1 - 3^{-2-2i}) [f^{(3+2i)}(3h) - f^{(3+2i)}(0)] =$$

$$= \frac{3h}{8} [f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h)] - \frac{h^4}{80} [f^{(3)}(3h) - f^{(3)}(0)] +$$

$$+ \frac{h^6}{336} [f^{(5)}(3h) - f^{(5)}(0)] - \frac{13h^8}{19300} [f^{(7)}(3h) - f^{(7)}(0)] + \dots$$

3. Случай пяти ординат:

$$\int_0^{4h} f(x) dx \sim 4h \left[\frac{7}{90} f(0) + \frac{16}{45} f(h) + \frac{2}{15} f(2h) + \frac{16}{45} f(3h) + \frac{7}{90} f(4h) \right] -$$

$$- \sum_{i=0} \frac{4^{6+2i} h^{6+2i} B_{6+2i}}{90(6+2i)!} (2 - 5 \cdot 2^{-3-2i} + 2^{-5-4i}) [f^{(5+2i)}(4h) - f^{(5+2i)}(0)];$$

$$C_0 = -\frac{2h^6}{945}, \quad C_2 = \frac{h^8}{900}, \quad C_4 = -\frac{17h^{10}}{35640}.$$

Во всех приведенных формулах коэффициенты больше, нежели соответствующие коэффициенты в формуле Эйлера — Маклорена, и поэтому они, как правило, менее благоприятны в приложениях. Но они могут оказаться полезными при выборочном контроле вычислений и, кроме того, они в некоторых случаях позволяют построить двухсто-роннее приближение к точному значению интеграла и оценить погреш-ность вычислений.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
1 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. М. Никольский, Усп. матем. наук, 5, в. 2 (36) (1950). ² Г. Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, 1951.