

А. Л. МИКАЭЛЯН

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ НАМАГНИЧЕННЫМ ФЕРРИТОМ

(Представлено академиком В. А. Котельниковым 9 VI 1954)

Введение и постановка задачи. В последнее время значительное внимание уделяется вопросам, связанным с распространением электромагнитных волн в волноводах, которые заполнены намагниченным ферритом. Случай распространения волн в круглом волноводе, заполненном ферритом, намагниченным вдоль оси волновода, довольно подробно освещен в литературе ⁽¹⁾. Основная задача при этом сводится к нахождению постоянной распространения волны, что требует решения трансцендентного уравнения.

В настоящей статье мы будем рассматривать распространение электромагнитных волн в прямоугольном волноводе, заполненном ферритом, который намагничен в направлении, перпендикулярном оси волновода, т. е. вдоль оси z , постоянным магнитным полем напряженности H_z (см. рис. 1А). В этом случае, как известно, среда становится анизотропной и может быть охарактеризована тензором магнитной проницаемости вида:

$$\begin{vmatrix} \mu & -ik & 0 \\ ik & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}, \quad (1)$$

в котором μ и k зависят от H_z (k зависит также от направления H_z) и при наличии магнитных потерь комплексны ⁽²⁾.

Следовательно, для гармонической во времени волны ($e^{i\omega t}$), распространяющейся в такой среде, связь магнитной индукции $\mathbf{b}$ с напряженностью поля $\mathbf{h}$ будет иметь вид:

$$b_x = \mu h_x - ikh_y, \quad b_y = \mu h_y + ikh_x, \quad b_z = \mu_z h_z. \quad (2)$$

Здесь магнитные величины, написанные с маленькой буквы, относятся к полю волны.

При решении указанной задачи мы используем метод, исходящий из рассмотрения парциальных волн в волноводе ⁽³⁾. В соответствии с этим методом мы сначала найдем решения для волн, распространяющихся между параллельными идеально проводящими плоскостями $z = 0$, $z = z_0$, а затем образуем такую сумму этих волн, чтобы удовлетворить граничным условиям на боковых стенках волновода $x = 0$, $x = x_0$.

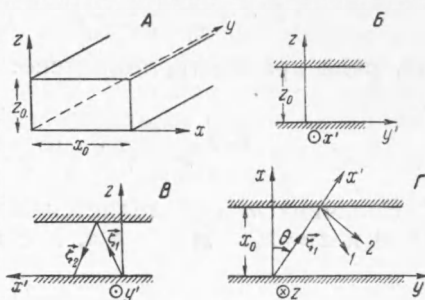


Рис. 1

Распространение между плоскостями $z=0$, $z=z_0$. Для исследования этого случая мы найдем волну, распространяющуюся в безграничной среде в направлении $\vec{\zeta}_1$ (см. рис. 1B). Решение для такой волны должно содержать множитель вида: $e^{-i\gamma x'}e^{-imz}$, где γ, m — составляющие постоянной распространения вдоль осей x' и z .

Таким же способом найдем решение для волны, бегущей в направлении $\vec{\zeta}_2$ и содержащей множитель вида $e^{-i\gamma x'}e^{imz}$. Взяв сумму этих волн, мы сможем удовлетворить граничным условиям на плоскостях $z=0$, $z=z_0$ и, тем самым, найти общее решение в виде волн, распространяющихся между идеально проводящими плоскостями $z=0$, $z=z_0$ (рис. 1Б и 1В). Это решение имеет вид:

$$h_{x'} = A \cos mz e^{-i\gamma x'}, \quad h_{y'} = i \frac{\mu}{k} a A \cos mz e^{-i\gamma x'}, \quad h_{z'} = i\gamma b A \sin mz e^{-i\gamma x'},$$

$$E_{x'} = \frac{m}{\omega \varepsilon} \frac{\mu}{k} a A \sin mz e^{-i\gamma x'}, \quad E_{y'} = i\omega \mu_z b A \sin mz e^{-i\gamma x'},$$

$$E_z = -i \frac{\gamma}{\omega \varepsilon} \frac{\mu}{k} a A \cos mz e^{-i\gamma x'}, \quad b_{x'} = -\frac{m}{\omega} E_{y'} = m \mu_z b A \cos mz e^{-i\gamma x'}, \quad (3)$$

$$b_{y'} = -\frac{m^2 + \gamma^2}{\omega \gamma} E_z = i \frac{m^2 + \gamma^2}{\omega^2 \varepsilon} \frac{\mu}{k} a A \cos mz e^{-i\gamma x'},$$

где, ради краткости, положено:

$$b = \frac{m}{k_z^2 - \gamma^2}, \quad a = \frac{\gamma^2 + \frac{\mu_z}{\mu} m^2 - k_z^2}{k_z^2 - \gamma^2}, \quad k_z^2 = \omega^2 \mu_z \varepsilon. \quad (4)$$

Величина m определяется из граничных условий на плоскостях $z=0$ и $z=z_0$: $mz_0 = n_z \pi$, где $n_z = 0, 1, 2, \dots$, откуда:

$$m = n_z \frac{\pi}{z_0}. \quad (5)$$

Постоянная распространения γ определяется из условия совместности уравнений Максвелла и равна:

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[k_z^2 + k_{\perp}^2 - m^2 \left(1 + \frac{\mu_z}{\mu} \right) \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[k_z^2 + k_{\perp}^2 - m^2 \left(1 + \frac{\mu_z}{\mu} \right) \right]^2 - k_z^2 k_{\perp}^2 - m^4 \frac{\mu_z}{\mu} + 2m^2 k_z^2}, \quad (6)$$

где $k_{\perp}^2 = \omega^2 \varepsilon \frac{\mu^2 - k_z^2}{\mu}$.

Таким образом, любому целому числу n_z соответствуют две независимые волны с постоянными распространения γ_1 и γ_2 и с составляющими поля, определенными формулами (3).

Распространение волн в волноводе. Формулы (3) определяют все возможные типы волн, которые могут распространяться в ферритовой среде, ограниченной плоскостями $z=0$ и $z=z_0$, в произвольном направлении x' , образующем угол θ с осью x (рис. 1Г). В координатах xu решение (3) примет вид:

$$h_x = \left(\gamma_x - i \frac{\mu}{k} a \gamma_y \right) A \cos mz e^{-i\gamma_x x} e^{-i\gamma_y y},$$

$$h_y = \left(i \frac{\mu}{k} a \gamma_x + \gamma_y \right) A \cos mz e^{-i\gamma_x x} e^{-i\gamma_y y}, \quad h_z = i\gamma^2 b A \sin mz e^{-i\gamma_x x} e^{-i\gamma_y y},$$

$$E_x = \left(\frac{m}{\omega \varepsilon} \frac{\mu}{k} a \gamma_x - i\omega \mu_z b \gamma_y \right) A \sin mz e^{-i\gamma_x x} e^{-i\gamma_y y},$$

$$E_y = \left(i\omega\mu_z b\gamma_x + \frac{m}{\omega\varepsilon} \frac{\mu}{k} a\gamma_y \right) A \sin mz e^{-i\gamma_x x} e^{-i\gamma_y y}, \quad (7)$$

$$E_z = -\frac{\gamma^2}{\omega\varepsilon} i \frac{\mu}{k} a A \cos mz e^{-i\gamma_x x} e^{-i\gamma_y y},$$

$$b_x = \left(\mu_z m b\gamma_x - i \frac{\mu}{k} \frac{m^2 + \gamma^2}{\omega^2 \varepsilon} a\gamma_y \right) A \cos mz e^{-i\gamma_x x} e^{-i\gamma_y y},$$

$$b_y = \left(i \frac{\mu}{k} \frac{m^2 + \gamma^2}{\omega^2 \varepsilon} a\gamma_x + \mu_z m b\gamma_y \right) A \cos mz e^{-i\gamma_x x} e^{-i\gamma_y y}.$$

Здесь $\gamma_x = \gamma \cos \theta$, $\gamma_y = \gamma \sin \theta$, $\gamma^2 = \gamma_x^2 + \gamma_y^2$.

Предположим, что волны с индексами 1 и 2 независимы и в присутствии боковых стенок $x=0$, $x=x_0$, т. е. в волноводе. Это означает, что если в направлении ζ (рис. 1Г) падает волна с индексом 1, то от стенки $x=x_0$ должна отражаться только одна волна с тем же индексом. Эта отраженная волна также будет определяться формулами (7), в которых знак γ_x надо изменить на обратный. Легко, однако, видеть, что суммой этих двух волн мы не сможем удовлетворить граничным условиям на стенке $x=x_0$. Это означает, что волны с индексами 1 и 2 не могут существовать в волноводе независимо друг от друга. В частности, при отражении от стенки $x=x_0$ происходит расщепление одной волны на две волны, имеющие разные индексы. Таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям на боковых стенках волновода, нам надо взять решение в виде суммы четырех волн: двух падающих и двух отраженных, имеющих одинаковые составляющие постоянной распространения вдоль оси y , т. е. γ_y . Мы выпишем только составляющие E_y и E_z этой волны:

$$E = E_{y_1}^{\text{пад}} + E_{y_1}^{\text{отр}} + E_{y_2}^{\text{пад}} + E_{y_2}^{\text{отр}}, \quad E_z = E_{z_1}^{\text{пад}} + E_{z_1}^{\text{отр}} + E_{z_2}^{\text{пад}} + E_{z_2}^{\text{отр}}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} E_{y_1}^{\text{пад}} &= \left(i\omega\mu_z b_1 \gamma_{x_1} + \frac{m}{\omega\varepsilon} \frac{\mu}{k} a_1 \gamma_y \right) A_1^{\text{пад}} e^{-i\gamma_{x_1} x} e^{-i\gamma_y y}, \\ E_{y_1}^{\text{отр}} &= \left(-i\omega\mu_z b_1 \gamma_{x_1} + \frac{m}{\omega\varepsilon} \frac{\mu}{k} a_1 \gamma_y \right) A_1^{\text{отр}} e^{+i\gamma_{x_1} x} e^{-i\gamma_y y}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$E_{y_2}^{\text{пад}} = \left(i\omega\mu_z b_2 \gamma_{x_2} + \frac{m}{\omega\varepsilon} \frac{\mu}{k} a_2 \gamma_y \right) A_2^{\text{пад}} e^{-i\gamma_{x_2} x} e^{-i\gamma_y y},$$

$$E_{y_2}^{\text{отр}} = \left(-i\omega\mu_z b_2 \gamma_{x_2} + \frac{m}{\omega\varepsilon} \frac{\mu}{k} a_2 \gamma_y \right) A_2^{\text{отр}} e^{+i\gamma_{x_2} x} e^{-i\gamma_y y},$$

$$E_{z_1}^{\text{пад}} = -i \frac{\mu}{k} \frac{\gamma_1^2}{\omega\varepsilon} a_1 A_1^{\text{пад}} e^{-i\gamma_{x_1} x} e^{-i\gamma_y y}, \quad E_{z_1}^{\text{отр}} = -i \frac{\mu}{k} \frac{\gamma_1^2}{\omega\varepsilon} a_1 A_1^{\text{отр}} e^{+i\gamma_{x_1} x} e^{-i\gamma_y y}, \quad (10)$$

$$E_{z_2}^{\text{пад}} = -i \frac{\mu}{k} \frac{\gamma_2^2}{\omega\varepsilon} a_2 A_2^{\text{пад}} e^{-i\gamma_{x_2} x} e^{-i\gamma_y y}, \quad E_{z_2}^{\text{отр}} = -i \frac{\mu}{k} \frac{\gamma_2^2}{\omega\varepsilon} a_2 A_2^{\text{отр}} e^{+i\gamma_{x_2} x} e^{-i\gamma_y y}.$$

При этом

$$\gamma_1^2 = \gamma_{x_1}^2 + \gamma_y^2, \quad \gamma_2^2 = \gamma_{x_2}^2 + \gamma_y^2. \quad (11)$$

Накладывая теперь на E_y и E_z граничные условия, согласно которым E_y и E_z равны нулю при $x=0$ и $x=x_0$, получим систему четырех линейных уравнений для определения амплитуд:

$$\begin{aligned} ik_z^2 b_1 \gamma_{x_1} P_1 + ik_z^2 b_2 \gamma_{x_2} P_2 + m \frac{\mu}{k} a_1 \gamma_y C_1 + m \frac{\mu}{k} a_2 \gamma_y C_2 &= 0; \\ \gamma_1^2 a_1 C_1 + \gamma_2^2 a_2 C_2 &= 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$-i\gamma_1^2 a_1 \sin \gamma_{x_1} x_0 P_1 - i\gamma_2^2 a_2 \sin \gamma_{x_2} x_0 P_2 + \gamma_1^2 a_1 \cos \gamma_{x_1} x_0 C_1 + \gamma_2^2 a_2 \cos \gamma_{x_2} x_0 C_2 = 0;$$

$$\begin{aligned}
& i \left(k_z^2 b_1 \gamma_{x_1} \cos \gamma_{x_1} x_0 - m \frac{\mu}{k} a_1 \gamma_y \sin \gamma_{x_1} x_0 \right) P_1 + \\
& + i \left(k_z^2 b_2 \gamma_{x_2} \cos \gamma_{x_2} x_0 - m \frac{\mu}{k} a_2 \gamma_y \sin \gamma_{x_2} x_0 \right) P_2 + \\
& + \left(k_z^2 b_1 \gamma_{x_1} \sin \gamma_{x_1} x_0 + m \frac{\mu}{k} a_1 \gamma_y \cos \gamma_{x_1} x_0 \right) C_1 + \\
& + \left(k_z^2 b_2 \gamma_{x_2} \sin \gamma_{x_2} x_0 + m \frac{\mu}{k} a_2 \gamma_y \cos \gamma_{x_2} x_0 \right) C_2 = 0.
\end{aligned}$$

Здесь

$$P_{1,2} = A_{1,2}^{\text{пад}} - A_{1,2}^{\text{отр}}, \quad C_{1,2} = A_{1,2}^{\text{пад}} + A_{1,2}^{\text{отр}}. \quad (13)$$

Приравнявая нулю определитель этой системы, получим трансцендентное уравнение для определения постоянной распространения γ_y . После довольно кропотливых вычислений это уравнение примет вид:

$$\begin{aligned}
& 2k_z^4 \gamma_1^2 \gamma_2^2 b_1 b_2 \gamma_{x_1} \gamma_{x_2} (1 - \cos \gamma_{x_1} x_0 \cos \gamma_{x_2} x_0) = \\
& = \left[k_0^4 \left(\gamma_1^2 \frac{a_2}{a_1} b_1^2 \gamma_{x_1}^2 + \gamma_1^4 \frac{a_1}{a_2} b_2^2 \gamma_{x_2}^2 \right) + m^2 \frac{\mu^2}{k^2} \gamma_y^2 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)^2 a_1 a_2 \right] \sin \gamma_{x_1} x_0 \sin \gamma_{x_2} x_0,
\end{aligned} \quad (14)$$

где γ_1^2 и γ_2^2 определяются через m^2 формулой (6); $\gamma_{x_1}^2 = \gamma_1^2 - \gamma_y^2$, $\gamma_{x_2}^2 = \gamma_2^2 - \gamma_y^2$.

Таким образом, в волноводе, заполненном ферритом, к которому приложено постоянное магнитное поле в поперечном направлении, каждому целому числу n_z (формула (5)) соответствует одна волна.

Для исследования частных случаев $k \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow \mu_z$ (намагничивание среды исчезает) и $m = 0$ (вырожденные волны, составляющие поля которых не зависят от оси z) формулу (14) удобно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned}
& \left[\gamma_1^2 b_2 a_1 \gamma_{x_2} \sin \frac{\gamma_{x_1} x_0}{2} \cos \frac{\gamma_{x_2} x_0}{2} - \gamma_2^2 b_1 a_2 \gamma_{x_1} \sin \frac{\gamma_{x_2} x_0}{2} \cos \frac{\gamma_{x_1} x_0}{2} \right] \times \\
& \times \left[\gamma_2^2 b_1 a_2 \gamma_{x_1} \sin \frac{\gamma_{x_1} x_0}{2} \cos \frac{\gamma_{x_2} x_0}{2} - \gamma_1^2 b_2 a_1 \gamma_{x_2} \sin \frac{\gamma_{x_2} x_0}{2} \cos \frac{\gamma_{x_1} x_0}{2} \right] = \\
& = a_1^2 a_2^2 \frac{m^2}{4k_z^4} \frac{\mu^2}{k^2} \gamma_y^2 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)^2 \sin \gamma_{x_1} x_0 \sin \gamma_{x_2} x_0.
\end{aligned} \quad (14^1)$$

В первом случае ($k \rightarrow 0$) легко видеть, что: $b_1/b_2 \rightarrow 1$, $a_1/a_2 \rightarrow -1$, $\gamma_{x_1} \rightarrow \gamma_{x_2}$, правая часть уравнения (14¹) стремится к нулю и для определения γ_y получается формула:

$$\sin \sqrt{k_z^2 - m^2 - \gamma_y^2} x_0 = 0. \quad (14^2)$$

Во втором случае ($m \rightarrow 0$) отношения b_1/a_1 и a_2/b_2 стремятся к бесконечности как $1/m$ и γ_y определяется из уравнения:

$$\sin \sqrt{k_z^2 - \gamma_y^2} x_0 = 0. \quad (14^3)$$

Волны, определяемые в этом случае, имеют только 3 составляющих поля E_z , b_x , b_y , что видно из формул (7).

Автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту АН СССР А. А. Пистолькорсу за обсуждение.

Поступило
25 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. Л. Калес, J. Appl. Physics, 5 (1953). ² А. Л. Микаэлян, УФН, 10 (1953). ³ Б. А. Введенский, А. Г. Аренберг, Радиоволноводы, 1946, стр. 66.