

Н. П. КЛЕПИКОВ

К ТЕОРИИ ВАКУУМНОГО ФУНКЦИОНАЛА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 7 VI 1954)

Как известно ^(1,2), для нахождения всех функций Грина для пространства электронов, позитронов и фотонов достаточно знать один вакуумный функционал

$$G_0 = \langle T(\exp i \int L(x) dx) \rangle_0, \quad (1)$$

где $\langle \rangle_0$ означает усреднение по вакууму и

$$L(x) = \frac{ie}{2} (\bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x) - \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\alpha(x)) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} A_\mu(x) + \\ + \bar{\eta}_\alpha(x) \psi_\alpha(x) + \bar{\psi}_\alpha(x) \eta_\alpha(x) + J_\mu(x) A_\mu(x), \quad (2)$$

где $J_\mu(x)$ есть внешний ток, а спиноры $\bar{\eta}_\alpha(x)$ и $\eta_\alpha(x)$ изображают источники электронно-позитронного поля, причем

$$\{\bar{\psi}(x), \eta(x')\} = \{\psi(x), \bar{\eta}(x')\} = \{\bar{\eta}(x), \eta(x')\} = \left\{ \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)}, \frac{\delta}{\delta \eta(x')} \right\} = 0, \\ \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha(x)}, \eta_\beta(x') \right\} = \left\{ \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_\alpha(x)}, \bar{\eta}_\beta(x') \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x')^*.$$

Функция Грина электрона при этом выражается следующим образом:

$$iG_{\alpha\beta}(x, y) \equiv \frac{1}{G_0} \langle T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \exp i \int L(z) dz) \rangle_0 = \\ = \frac{1}{G_0} \frac{\delta^2 G_0}{\delta \eta_\beta(y) \delta \bar{\eta}_\alpha(x)} = - \frac{1}{G_0} \frac{\delta^2 G_0}{\delta \bar{\eta}_\alpha(x) \delta \eta_\beta(y)}. \quad (3)$$

Аналогично

$$i \langle A_\mu(x) \rangle \equiv \frac{i}{G_0} \langle T(A_\mu(x) \exp i \int L(z) dz) \rangle_0 = \frac{1}{G_0} \frac{\delta G_0}{\delta J_\mu(x)}. \quad (4)$$

Соотношения (3) и (4) имеют одинаковый вид независимо от того, полагаются ли величины $J_\mu(x)$, $\bar{\eta}_\alpha(x)$ и $\eta_\alpha(x)$ после варьирования равными нулю или нет (при наличии источников $\bar{\eta}$ и η электрон взаимодействует при этом с порождаемыми ими частицами). Подобным

* Мы пользуемся матрицами γ_μ в обозначениях Фейнмана. Для сравнения с работами Швингера по теории функций Грина следует сделать замену $\gamma_\mu \rightarrow -i\gamma_\mu$.

образом при помощи вариационных производных по $J_\mu(x)$, $\bar{\eta}_\alpha(x)$ и $\eta_\alpha(x)$ могут быть найдены все другие функции, соответствующие диаграммам с различным числом свободных концов электронных и фотонных линий.

В связи с тем, что из (1) функционал G_0 может быть получен лишь в виде ряда по произведениям величин e , $J_\mu(x)$, $\bar{\eta}_\alpha(x)$ и $\eta_\alpha(x)$, возникает задача о нахождении системы уравнений в вариационных производных, определяющих G_0 подобно тому, как это сделано Швингером ⁽¹⁾ для функционалов $G_{\alpha\beta}(x, y)$ и $\langle A_\mu(x) \rangle$. Для нахождения такой системы заметим, что варьирование G_0 по $J_\mu(x)$ приводит к появлению оператора $A_\mu(x)$ под знаком T -произведения. Применим далее обобщение теоремы Вика, данное Боголюбовым*, которое можно записать в следующем виде:

$$T(A(x)B_1(x_1)\dots B_n(x_n)) = \\ = N(A(x)B_1(x_1)\dots B_n(x_n)) + \sum_{k=1}^n A^c(x) T(B_1(x_1)\dots B_k^c(x_k)\dots B_n(x_n)), \quad (5)$$

где индекс c означает хронологическое спаривание операторов и N — знак нормального произведения. В предположении представимости $\exp i \int L(z) dz$ в виде бесконечного произведения $\prod_{z=-\infty}^{+\infty} (1 + iL(z) dz)$ это приводит к соотношению

$$\langle T(A(x) \exp i \int L(z) dz) \rangle_0 = \\ = i \int A^c(x) L^c(y) dy \langle T(\exp i \int L(z) dz) \rangle_0. \quad (6)$$

Спаривание $A_\mu(x)$ с последним членом $L(y)$ приводит к появлению множителя $J_\mu(x)$, а с первым — множителя $\bar{\psi}_\mu \psi - \bar{\psi}_\mu \psi$, который может быть представлен при помощи смешанных вариационных производных по $\bar{\eta}$ и η . Повторяя этот расчет для вариационных производных G_0 по $\bar{\eta}$ и η и пользуясь формулами хронологического спаривания

$$\bar{\psi}_\alpha^c(x) \psi_\beta^c(y) = \frac{1}{2} S_{\beta\alpha}^F(y-x), \\ \psi_\beta^c(y) \bar{\psi}_\alpha^c(x) = -\frac{1}{2} S_{\beta\alpha}^F(y-x), \quad (7) \\ A_\mu^c(x) A_\nu^c(y) = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} D^F(x-y),$$

получим следующую систему уравнений для G_0 :

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} + \frac{1}{2} \int D^F(x-y) J_\mu(y) dy + \right. \\ \left. + \frac{ie}{4} \int D^F(x-y) \lim_{y' \rightarrow y} \left(\frac{\delta^2}{\delta \eta_\alpha(y') \delta \bar{\eta}_\beta(y)} - \frac{\delta^2}{\delta \bar{\eta}_\beta(y') \delta \eta_\alpha(y)} \right) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} dy \right\} G_0 = 0, \quad (8)$$

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha(x)} + \frac{1}{2} \int \bar{\eta}_\beta(y) S_{\beta\alpha}^F(y-x) dy + \right. \\ \left. + \frac{ie}{2} \int \frac{\delta}{\delta J_\nu(y)} \frac{\delta}{\delta \eta_\gamma(y)} (\gamma_\nu)_{\gamma\beta} S_{\beta\alpha}^F(y-x) dy \right\} G_0 = 0, \quad (9)$$

* См. дипломную работу М. К. Поливанова, МГУ, 1954.

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha(x)} - \frac{1}{2} \int S_{\alpha\beta}^F(x-y) \eta_\beta(y) dy + \right. \\ \left. + \frac{ie}{2} \int \frac{\delta}{\delta J_\nu(y)} S_{\alpha\beta}^F(x-y) (\gamma_\nu)_{\beta\gamma} \frac{\delta}{\delta \eta_\gamma(y)} dy \right\} G_0 = 0. \quad (10)$$

Эта система уравнений, являясь линейной, определяет функционал G_0 с точностью до произвольного множителя, не зависящего от J_μ , $\bar{\eta}$, η . В этом заключается отличие системы (8) — (10) от системы уравнений Швингера, где произвольная величина исключена за счет введения нелинейности уравнений.

Проверим теперь, что уравнения Швингера вытекают из системы (8) — (10). Для этого применим к уравнению (8) оператор Даламбера, уравнение (9) проварьируем по η , а уравнение (10) — по η , к (9) и (10) применим оператор Дирака и воспользуемся соотношениями (3) и (4). Тогда, учитывая антикоммутации $\bar{\eta}$ и η , а также производных по ним, полагая $\eta = \bar{\eta} = 0$ и помня, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} D^F(x-y) = \frac{\partial^2}{\partial y_\nu^2} D^F(x-y) = 2i\delta(x-y), \\ \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + m \right) S^F(x-y) = \left(-\tilde{\gamma}_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu} + m \right) S^F(x-y) = 2i\delta(x-y), \quad (11)$$

получим систему

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} \langle A_\mu(x) \rangle = J_\mu(x) - \frac{e}{2} \lim_{y \rightarrow x} \text{tr} \gamma_\mu (G(y, x) + G(x, y)), \quad (12)$$

$$\left[\gamma_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - ie \langle A_\nu(x) \rangle - e \frac{\delta}{\delta J_\nu(x)} \right) + m \right] G(x, y) = \delta(x-y), \quad (13)$$

$$\left[\tilde{\gamma}_\nu \left(-\frac{\partial}{\partial y_\nu} - ie \langle A_\nu(y) \rangle - e \frac{\delta}{\delta J_\nu(y)} \right) + m \right] G(x, y) = \delta(x-y), \quad (14)$$

совпадающую с уравнениями Швингера.

Для исследования совместности системы (8) — (10) рассмотрим ее решение по методу последовательных приближений, представляя $\ln G_0$ в виде ряда по степеням e . В нулевом приближении полагаем произвольный множитель равным единице, а появляющиеся на остальных ступенях расчета произвольные постоянные (аддитивные к $G_0^{(0)}$) полагаем равными нулю, так как оставление таких констант приводит к появлению решения вида

$$G_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^n G[J_\mu, \bar{\eta}, \eta] = f(e) G[J_\mu, \bar{\eta}, \eta], \quad (15)$$

где c_n — произвольные константы, $G[J_\mu, \bar{\eta}, \eta]$ не зависит от n и, следовательно, $f(e)$ есть произвольная функция e , которая все равно сокращается в выражениях типа (3) и (4). Легко видеть, что эта произвольная функция включает все множители в членах разложения (1) по степеням e , происходящие от замкнутых вакуумных петель на диаграммах (переходы вакуум — вакуум). Таким образом, все члены разложения (1), содержащие такие петли, можно устранить из рассмотрения. Тот факт, что мы ищем решение в виде ряда для $\ln G_0$, а не для G_0 , позволяет не рассматривать отдельно членов, соответствующих диаграммам с несвязанными частями (повторение диаграмм более низкого порядка). Такие члены появятся при разложении $\exp \ln G_0$ в ряд. После этих замечаний легко найти разложение $\ln G_0$, первые члены которого имеют вид

$$\begin{aligned}
\ln G_0 = & -\frac{1}{2} \int J_\nu(z) {}^{1/2} D^F(z-t) J_\nu(t) dz dt + \int \bar{\eta}(z) {}^{1/2} S^F(z-t) \eta(t) dz dt + \\
& + ie \int \bar{\eta}(z) {}^{1/2} S^F(z-t) \gamma_\nu J_\nu(u) {}^{1/2} D^F(u-t) {}^{1/2} S^F(t-v) \eta(v) dz dt du dv + \\
& + \frac{e^2}{2} \int J_\mu(z) {}^{1/2} D^F(z-t) \text{tr}(\gamma_\mu {}^{1/2} S^F(t-u) \gamma_\nu {}^{1/2} S^F(u-t)) {}^{1/2} D^F(u-v) \times \\
& \quad \times J_\nu(v) dz dt du dv + \\
& + e^2 \int \bar{\eta}(z) {}^{1/2} S^F(z-t) \gamma_\nu {}^{1/2} S^F(t-u) {}^{1/2} D^F(t-u) \gamma_\nu {}^{1/2} S^F(u-v) \times \\
& \quad \times \eta(v) dz dt du dv - \\
& - e^2 \int \bar{\eta}(z) {}^{1/2} S^F(z-t) \gamma_\nu {}^{1/2} D^F(t-x) J_\nu(x) {}^{1/2} S^F(t-u) \times \\
& \quad \times \gamma_\mu {}^{1/2} D^F(u-y) J_\mu(y) {}^{1/2} S^F(u-v) \eta(v) dz dt dx dy du dv + \\
& + \frac{e^2}{2} \int \bar{\eta}(z) {}^{1/2} S^F(z-x) \gamma_\nu {}^{1/2} S^F(x-u) \eta(u) {}^{1/2} D^F(x-y) \bar{\eta}(t) \times \\
& \quad \times {}^{1/2} S^F(t-y) \gamma_\nu {}^{1/2} S^F(y-v) \eta(v) dz dt dx dy du dv + \dots, \quad (16)
\end{aligned}$$

где подразумевается суммирование по спинорным индексам. Как и следовало ожидать, это разложение содержит все обычные расходящиеся члены, кроме чисто вакуумных. Члены разложения (16) соответствуют диаграммам, изображенным на рис. 1, где белым кружком обозначен источник η , черным — источник $\bar{\eta}$, а крестиком —

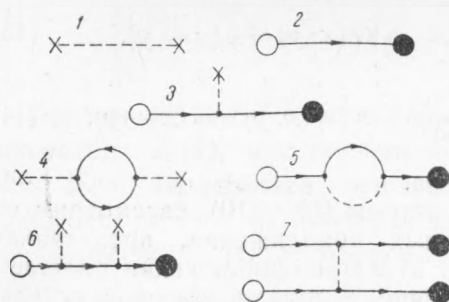


Рис. 1. Диаграммы 1 — 7 соответствуют членам разложения (16) и расположены в том же порядке

внешний ток J_μ . Если отвлечься от расходимостей отдельных членов (16) и отсутствия доказательства сходимости разложения в целом после перенормировки, то само существование этого разложения, удовлетворяющего уравнениям (8) — (10), указывает на их совместность. Исследование возможности нахождения замкнутого решения линейной системы (8) — (10), подобное тому, которое привели И. М. Гельфанд и Р. А. Минлос⁽³⁾, представляется более простым, чем решение

нелинейных систем уравнений для функций Грина, рассмотренное Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосовым и И. М. Халатниковым⁽⁴⁾, а также Б. Л. Иоффе⁽⁵⁾.

В заключение автор выражает благодарность акад. Н. Н. Боголюбову, а также Л. И. Лапидусу, С. М. Биленькому и В. Г. Соловьеву за обсуждение и ценные советы.

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452, 455 (1951). ² R. Utiyama, S. Supakawa, T. Imamura, Progr. Theor. Phys., **8**, 77 (1952). ³ И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, ДАН, **97**, 209 (1954). ⁴ Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, **95**, 497, 773 (1954). ⁵ Б. Л. Иоффе, ДАН, **95**, 761 (1954).