

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. ИЛЬИН

О ВОЗБУЖДЕНИИ НЕИДЕАЛЬНЫХ РАДИОВОЛНОВОДОВ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 31 V 1954)

В настоящей работе решена задача о возбуждении неидеальных цилиндрических радиоволноводов произвольного сечения, имеющих конечное число угловых линий. При решении используется метод, развитый автором в работе ⁽¹⁾. Кроме того, используется решение соответствующей задачи для случая идеально проводящих стенок в той форме, как оно получено в работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского ^(2,3). Вопрос о неидеальных волноводах до сих пор не получил в литературе достаточного освещения. Я. Л. Альперт ⁽⁴⁾ рассматривал частный случай круглого волновода.

В работе Б. З. Каценеленбаума ⁽⁵⁾ применен метод последовательных приближений к волноводу с произвольным сечением. Автор исходит при этом из краевых условий Леонтовича 1-го порядка и сводит задачу к некоторой неоднородной краевой задаче для волнового уравнения. Поскольку автор исходит из краевых условий 1-го порядка, полученные им приближения не могут быть использованы для волноводов, имеющих угловые линии (прямоугольный волновод и др.), как это показано в работе ⁽¹⁾.

Мы рассмотрим решение задачи о возбуждении неидеального волновода с точностью до членов 1-го и 2-го порядков относительно w (где w равно отношению волновых чисел k/k_0 в среде, заполняющей волновод, и в металле); рассмотрим далее волновод с угловыми линиями и оценим «зоны действия» полученных решений.

В работах ^(2,3) построены функции источника $\bar{\Pi}_1$ и $\bar{\Pi}_2$ для идеального волновода, возбуждаемого электрическим и, соответственно, магнитным диполем, параллельным оси волновода (в работах ^(2,3) эти функции обозначаются через Π и $\hat{\Pi}$). В этих работах показано, что построенные функции источника позволяют решить задачу о возбуждении идеального волновода не только элементарными токами, параллельными оси волновода, но и произвольно ориентированными токами. Мы построим с точностью до членов порядка w и w^2 соответствующие функции источника Π_1 и Π_2 для неидеального волновода. При помощи этих функций поля в неидеальном волноводе, возбуждаемом произвольно ориентированными токами, определяются точно так же, как это делается в работах ^(2,3) для идеального волновода.

Функции источника для идеального волновода, построенные в работах ^(2,3), имеют вид:

$$\bar{\Pi}_1(P, \zeta, M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(P) \Psi_n(M)}{2p_n} e^{-p_n |z - \zeta|}, \quad (1)$$

$$\bar{\Pi}_2(P, \zeta, M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\Psi}_n(P) \hat{\Psi}_n(M)}{2\hat{p}_n} e^{-\hat{p}_n |z - \zeta|}. \quad (2)$$

Здесь приняты следующие обозначения: S — плоская область, полученная от пересечения цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси; Γ — контур, ограничивающий S ; P и M — двумерные координаты некоторых точек в плоскости S ; $\{\lambda_n\}$ — система собственных чисел, а $\{\Psi_n(M)\}$ — система собственных функций волнового уравнения $\Delta_2 \Psi_n + \lambda_n \Psi_n = 0$ в области S с краевым условием $\Psi_n|_{\Gamma} = 0$; $\{\hat{\lambda}_n\}$ — система собственных чисел, а $\{\hat{\Psi}_n(M)\}$ — система собственных функций волнового уравнения $\Delta_2 \hat{\Psi}_n + \hat{\lambda}_n \hat{\Psi}_n = 0$ в области S с краевым условием $\frac{\partial \hat{\Psi}_n}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$, $p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}$, $\hat{p}_n = \sqrt{\hat{\lambda}_n - k^2}$.

Используя метод, развитый в работе (1) (т. е. применяя формулу Грина к функциям $\Pi_1(M, z, M_0, \zeta_0)$ и $\bar{\Pi}_1(M, z, P, \zeta)$ и, соответственно, $\Pi_2(M, z, M_0, \zeta_0)$ и $\bar{\Pi}_2(M, z, P, \zeta)$), получим, используя также замечания, сделанные в работе (1), следующие выражения для функций источника Π_1 и Π_2 с точностью до членов первого порядка относительно w :

$$\Pi_1(P, \zeta, M_0, \zeta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(P) \Psi_n(M_0)}{2p_n} e^{-p_n|\zeta - \zeta_0|} - \frac{c\mu}{4\pi i \omega \mu_0} w \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_m(P) \Psi_{mn} \Psi_n(M_0)}{2p_m p_n} \left[\frac{p_m e^{-p_m|\zeta - \zeta_0|}}{p_m^2 - p_n^2} + \frac{p_n e^{-p_n|\zeta - \zeta_0|}}{p_n^2 - p_m^2} \right]; \quad (3)$$

$$\Pi_2(P, \zeta, M_0, \zeta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\Psi}_n(P) \hat{\Psi}_n(M_0)}{2\hat{p}_n} e^{-\hat{p}_n|\zeta - \zeta_0|} + \frac{i\varepsilon \mu_0 \omega}{4\pi c} w \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\Psi}_m(P) \hat{\Psi}_{mn} \hat{\Psi}_n(M_0)}{2\hat{p}_m \hat{p}_n} \left[\frac{\hat{p}_m e^{-\hat{p}_m|\zeta - \zeta_0|}}{\hat{p}_m^2 - \hat{p}_n^2} + \frac{\hat{p}_n e^{-\hat{p}_n|\zeta - \zeta_0|}}{\hat{p}_n^2 - \hat{p}_m^2} \right]. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения:

$$\Psi_{mn} = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Psi_m}{\partial n}(M) \frac{\partial \Psi_n}{\partial n}(M) ds_M; \quad \hat{\Psi}_{mn} = \int_{\Gamma} \hat{\Psi}_m(M) \hat{\Psi}_n(M) ds_M.$$

Вопрос о сходимости двойных рядов в формулах (3) и (4) упирается в вопрос о сходимости двойных билинейных рядов. Сходимость билинейных рядов исследована в статьях (6, 7) автора настоящей работы. В этих статьях доказано, что билинейный ряд вида

$$\sum_l \frac{\Psi_n(M) \Psi_n(M_0)}{\lambda_n^{1/s+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0)$$

сходится в среднем для любой двумерной области S (т. е. его можно почленно интегрировать), а для случая прямоугольника доказана даже равномерная условная сходимость этого ряда. Отсюда, принимая во внимание выражения Ψ_{mn} и $\hat{\Psi}_{mn}$, нетрудно установить сходимость двойных рядов в формулах (3) и (4). Аналогично вычисляются Π_1 и Π_2 с точностью до членов 2-го порядка.

Приведем выражение «магнитной» функции источника Π_2 , при этом для краткости обозначим через $\Pi_2^{(1)}$ все члены, входящие в состав пер-

вого приближения (т. е. в правую часть (4)):

$$\begin{aligned} \Pi_2(P, \zeta, M_0, \zeta_0) = & \Pi_2^{(1)}(P, \zeta, M_0, \zeta_0) + \\ & + \left(\frac{i\epsilon\mu_0\omega}{4\pi c} \right)^2 \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\Psi}_k(P) \hat{\Psi}_{km} \hat{\Psi}_{mn} \hat{\Psi}_n(M_0)}{2 \hat{p}_k \hat{p}_m \hat{p}_n} \times \\ & \times \left\{ \frac{\hat{p}_k \hat{p}_m e^{-\hat{p}_n |\zeta - \zeta_0|}}{(\hat{p}_k^2 - \hat{p}_n^2)(\hat{p}_m^2 - \hat{p}_n^2)} + \frac{\hat{p}_m \hat{p}_n e^{-\hat{p}_k |\zeta - \zeta_0|}}{(\hat{p}_m^2 - \hat{p}_k^2)(\hat{p}_n^2 - \hat{p}_k^2)} + \frac{\hat{p}_n \hat{p}_k e^{-\hat{p}_m |\zeta - \zeta_0|}}{(\hat{p}_n^2 - \hat{p}_m^2)(\hat{p}_k^2 - \hat{p}_m^2)} \right\} + \\ & + \frac{\epsilon\mu_0\omega}{8\pi kc} \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\Psi}_m(P) \hat{\Psi}_n(M_0)}{2 \hat{p}_m \hat{p}_n} \left[\frac{\hat{p}_m e^{-\hat{p}_n |\zeta - \zeta_0|}}{\hat{p}_m^2 - \hat{p}_n^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\hat{p}_n e^{-\hat{p}_m |\zeta - \zeta_0|}}{\hat{p}_n^2 - \hat{p}_m^2} \right] \int_{\Gamma} \kappa(M) \hat{\Psi}_m(M) \hat{\Psi}_n(M) ds_M. \end{aligned}$$

Вопрос о сходимости тройного ряда, стоящего в последней формуле, решается точно так же, как выше.

Предположим теперь, что волновод имеет N угловых линий. Им соответствуют угловые точки $S_1, S_2, \dots, S_N$ контура Γ с углами между касательными, равными, соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$.

В соответствии с изложенным в работе ⁽¹⁾, в этом случае в выражении для «магнитной» функции источника Π_2 появится добавочный член, который без труда может быть сосчитан. Он имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon\mu_0\omega}{8\pi kc} \omega^2 \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\Psi}_m(P) \hat{\Psi}_m(S_l) \hat{\Psi}_n(S_l) \hat{\Psi}_n(M_0)}{2 \hat{p}_m \hat{p}_n} |\pi - \alpha_l| \times \\ \times \left[\frac{\hat{p}_m e^{-\hat{p}_n |\zeta - \zeta_0|}}{\hat{p}_m^2 - \hat{p}_n^2} + \frac{\hat{p}_n e^{-\hat{p}_m |\zeta - \zeta_0|}}{\hat{p}_n^2 - \hat{p}_m^2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

В соответствии с изложенным в работе ⁽¹⁾, добавочный член (5) имеет логарифмическую особенность на угловых линиях и тем самым превалирует в окрестности угловых линий над всеми прочими членами в решении. Для «электрической» функции источника Π_1 добавочный член равен нулю.

Найденные функции источника, как уже указывалось, полностью решают задачу.

Нетрудно выяснить вопрос, при каких условиях можно ограничиться членами различного порядка относительно ω .

Заметим, что первое приближение растет при $|\zeta - \zeta_0| \rightarrow \infty$ как $|\zeta - \zeta_0|$. Такой порядок роста в формулах (3) и (4) создают члены с номерами $m = n$, для них выражение в квадратных скобках обращается в неопределенность типа $0/0$, которая при раскрытии равна $\frac{1}{2} e^{-\hat{p}_n |\zeta - \zeta_0|} \left[\frac{1}{\hat{p}_n} + |\zeta - \zeta_0| \right]$.

Аналогично можно показать, что второе приближение растет при $|\zeta - \zeta_0| \rightarrow \infty$ как $|\zeta - \zeta_0|^2$, а n -е приближение как $|\zeta - \zeta_0|^n$.

Таким образом, отдельные приближения представляют собой ряд по степеням $\frac{i\epsilon\mu_0\omega}{4\pi c} \omega |\zeta - \zeta_0|$ (для функции Π_2).

Отсюда легко оценить «зоны действия» нулевого приближения (т. е. решения «идеальной задачи») и первого приближения. Так, для

медного волновода для частоты $\nu = 3 \cdot 10^9$ гц (что соответствует длине волны $\lambda = 10$ см) «радиус действия» нулевого приближения равен приблизительно 10 м (т. е. на расстоянии 10 м от точки возбуждения можно пользоваться нулевым приближением, далее необходим переход к первому приближению).

Найденный порядок роста отдельных приближений наводит на предположение о том, что затухание полей в неидеальном волноводе имеет экспоненциальный или какой-то близкий к нему характер. Поскольку расчет энергии, поглощаемой стенками волновода, связан с интегрированием по поверхности волновода, а действие угловых линий захватывает только малые окрестности этих линий, можно утверждать, что наличие у волновода угловых линий не влияет на характер поглощения энергии.

Автор пользуется случаем принести благодарность проф. А. Н. Тихонову.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Ильин, ДАН, 97, № 2 (1954). ² А. А. Самарский, А. Н. Тихонов, ЖТФ, 17, № 11, 1283 (1947). ³ А. А. Самарский, А. Н. Тихонов, ЖТФ, 17, № 12, 1341 (1947). ⁴ Я. Л. Альперт, ЖТФ, 10, № 16, 1358 (1940). ⁵ Б. З. Каценеленбаум, ДАН, 38, № 1, 37 (1953). ⁶ В. А. Ильин, ДАН, 54, № 3, 413 (1950). ⁷ В. А. Ильин, ДАН, 54, № 4, 653 (1950).