

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ

**О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЕРВОНАЧАЛЬНО АНИЗОТРОПНЫХ
ОБОЛОЧЕК**

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 23 VII 1954)

В статье устанавливаются конечные соотношения между внутренними силами и моментами, справедливые для любой точки анизотропной оболочки к моменту исчерпания несущей способности последней. При рассмотрении напряженного и деформированного состояния оболочки используются постулаты Кирхгоффа — Лява, дополненные, следуя А. А. Ильюшину ⁽¹⁾, предположением о несжимаемости материала. Ниже изучаются оболочки, изготовленные лишь из ортотропного материала.

Для простоты изложения главные оси анизотропии примем совмещенными с координатными осями. Обозначим через σ_x , σ_y , τ , p_x , p_y , s компоненты напряжения, соответствующие деформациям изгиба, кручения, удлинения и сдвига в точке, отстоящей на расстояние z от срединной поверхности оболочки.

Для каждого слоя оболочки, параллельного ее срединной поверхности, выполняется условие пластичности ⁽²⁾:

$$(G + H)(p_x^2 + \sigma_x^2) - 2H(p_x p_y + \sigma_x \sigma_y) + (H + F)(p_y^2 + \sigma_y^2) + 2N(s^2 + \tau^2) - 1 = \\ = -2(G + H)p_x \sigma_x + 2H(p_x \sigma_y + \sigma_x p_y) - 2(H + F)p_y \sigma_y - 4Ns\tau, \quad (1)$$

где постоянные G , H , F , N характеризуют анизотропные свойства материала.

Левая часть соотношения (1) представляет собою четную функцию относительно z (по толщине оболочки), а правая — нечетную. Поэтому из тождества (1) вытекает равенство нулю каждой из этих функций (четной и нечетной) в отдельности. Следовательно:

$$(G + H)(p_x^2 + \sigma_x^2) - 2H(p_x p_y + \sigma_x \sigma_y) + (H + F)(p_y^2 + \sigma_y^2) + 2N(s^2 + \tau^2) = 1, \quad (2)$$

$$p_x [(G + H)\sigma_x - H\sigma_y] + p_y [(H + F)\sigma_y - H\sigma_x] + 2Ns\tau = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим подробно «простейшее напряженное состояние оболочки», при котором: или $p_x = s = 0$, или $\sigma_x = \tau = 0$.

Зависимости между напряжениями и скоростями деформации в общем случае имеют следующий вид ⁽²⁾:

$$p_x + \sigma_x = \frac{(F + H)(\dot{\epsilon}_1 - z\dot{\kappa}_1) + H(\dot{\epsilon}_2 - z\dot{\kappa}_2)}{\lambda(HF + FG + GH)}, \quad (4)$$

$$p_y + \sigma_y = \frac{H(\dot{\epsilon}_1 - z\dot{\kappa}_1) + (H + G)(\dot{\epsilon}_2 - z\dot{\kappa}_2)}{\lambda(HF + FG + GH)}, \quad s + \tau = \frac{\dot{\epsilon}_{12} - z\dot{\kappa}_{12}}{\lambda N},$$

где $\dot{\epsilon}_1$, $\dot{\epsilon}_2$, $\dot{\epsilon}_{12}$, $\dot{\kappa}_1$, $\dot{\kappa}_2$, $\dot{\kappa}_{12}$ обозначают, соответственно, скорости деформации удлинения, сдвига и искривления срединной поверхности,

а λ — положительный скалярный множитель пропорциональности, именуемый ниже «коэффициентом пластичности».

При $p_x = s = 0$ ввиду отсутствия осевой силы ($T_1 = p_x = 0$) получим:

$$(F + H)\dot{\varepsilon}_1 + H\dot{\varepsilon}_2 = 0. \quad (5)$$

Из условия равенства нулю сдвигающего усилия ($S = s = 0$) следует:

$$\dot{\varepsilon}_{12} = 0. \quad (6)$$

Наконец, используя соотношение (3), находим, что:

$$\dot{x}_2 = 0. \quad (7)$$

При помощи соотношений (2), (4), (5), (6) и (7) определяем коэффициент пластичности

$$\lambda = \sqrt{\frac{H+F}{H^2} \dot{\varepsilon}_1^2 + \left(\frac{H+F}{GF+FH+HG} \dot{x}_1^2 + \frac{2}{N} \dot{x}_{12}^2 \right) z^2}.$$

Для другого случая простейшего напряженного состояния ($\sigma_x = \tau = 0$)

$$\dot{x}_{12} = (F + H)\dot{x}_1 + H\dot{x}_2 = \dot{\varepsilon}_2 = 0,$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{H+F}{GF+FH+HG} \dot{\varepsilon}_1^2 + \frac{2}{N} \dot{\varepsilon}_{12}^2 + \frac{H+F}{H^2} \dot{x}_1^2 z^2}.$$

В силу четности коэффициента пластичности λ относительно z заключаем, что распространение и наращивание пластических деформаций происходит симметрично относительно срединной поверхности оболочки.

Ниже приводим значения усилия T_2 и моментов M_1 , M_{12} , выраженные через соответствующие элементы деформации срединной поверхности оболочки, когда $p_x = s = 0$:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{h\mu}{V(H+F)(1-\mu^2)} \ln \frac{1+V1-\mu^2}{\mu}, \\ M_1 &= \frac{(H+F)h^3\dot{x}_1}{8(GH+FH+GF)\sqrt{\lambda_1^2-\lambda_0^2}} \left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2} \ln \frac{1+V1-\mu^2}{\mu} - \frac{1}{V1-\mu^2} \right), \\ M_{12} &= \frac{h^3\dot{x}_{12}}{8N\sqrt{\lambda_1^2-\lambda_0^2}} \left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2} \ln \frac{1+V1-\mu^2}{\mu} - \frac{1}{V1-\mu^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

В последних соотношениях λ_0 и λ_1 соответственно обозначают значения λ вдоль срединной поверхности и в крайних по толщине оболочки волокнах, а $\mu = \lambda_0/\lambda_1$.

Если ввести квадратичные формы

$$\begin{aligned} Q_t &= \frac{(H+F)}{h^2} T_2^2, \\ Q_m &= \frac{16(GH+FG+HF)}{h^4(H+F)} M_1^2 + \frac{32N}{h^4} M_{12}^2, \end{aligned}$$

то легко получить конечное соотношение между усилиями и моментами (8) в следующем параметрическом виде:

$$\begin{aligned} Q_t &= \frac{\mu^2}{1-\mu^2} \ln^2 \frac{1+V1-\mu^2}{\mu}, \\ Q_m &= \left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2} \ln \frac{1+V1-\mu^2}{\mu} - \frac{1}{V1-\mu^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Как и в случае изотропной оболочки, кривая (9) достаточно хорошо аппроксимируется прямой (см. (1), стр. 177)

$$Q_t + Q_m = 1. \quad (10)$$

Во втором случае простейшего напряженного состояния ($\sigma_x = \tau = 0$) конечное соотношение также выражается при помощи зависимостей (9), в чем можно убедиться, используя уже другие квадратичные формы:

$$Q_t = \frac{GH + FH + GF}{(H + F)h^2} T_1^2 + \frac{2N}{h^2} S^2,$$

$$Q_m = \frac{16(H + F)}{h^4} M_2^2.$$

Весьма любопытно отметить, что к приближенной зависимости (10) можно прийти, полагая в условии пластичности (2) мембранные напряжения постоянными по толщине оболочки и, следовательно, допуская конечные разрывы в напряжениях изгиба и кручения вдоль срединной поверхности.

Обращает на себя внимание и тот факт, что отмеченные здесь деформационные свойства оболочки $[\dot{\epsilon}_{12} = (F + H)\dot{\epsilon}_1 + H\dot{\epsilon}_2 = \dot{\kappa}_2 = 0, \dot{\kappa}_{12} = (F + H)\dot{\kappa}_1 + H\dot{\kappa}_2 = \dot{\epsilon}_2 = 0]$ непосредственно вытекают из соответствующих условий статического характера ($T_1 = S = 0, M_1 = M_{12} = 0$).

Рассмотренный в статье класс оболочек служит предметом широкого изучения (3,4) прикладных теорий упругих и упруго-пластических оболочек.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз. ССР

Поступило
24 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. А. Ильяшин, Пластичность, 1948. ² R. Hill, The Mathematical Theory of Plasticity, 1950. ³ В. З. Власов, Строительная механика тонкостенных пространственных систем, 1949. ⁴ Ю. Н. Работнов, Прикладн. матем. и мех., 15, в. 2 (1951).