

Ю. М. ШЕХТМАН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ФИЛЬТРАЦИИ СМЕСИ ЖИДКОСТИ СО ВЗВЕШЕННЫМИ ТВЕРДЫМИ ЧАСТИЦАМИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ РАСХОДЕ ВО ВРЕМЕНИ И ПОСТОЯННОМ ПЕРЕПАДЕ ДАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 14 V 1954)

Ранее (^{2,3}) нами рассматривалась задача о фильтрации суспензии при постоянном расходе и переменном перепаде давления. Здесь дается решение задачи о фильтрации суспензии под действием постоянного перепада давления на участке фильтрации и при переменном расходе $q = q(t)$. Первое решение задачи находит, как известно, практическое применение при расчете водопроводных, дизельных и других подобных фильтров, заилиения призабойной зоны нагнетательных скважин и др. Даваемое здесь решение может найти практическое применение при расчете кольтмации каналов, земляных плотин водоемов и просто грунтов с целью уменьшения их фильтрационной способности. В рассматриваемом здесь случае особо важно бывает определение изменения фильтрационного расхода $q(t)$, а также концентрации твердого взвешенного вещества в фильтрующейся суспензии $\delta = \delta(x, t)$ и степени заполнения пор осевшими частицами $\zeta = \zeta(x, t)$ в процессе кольтмации.

В работе (¹) был дан метод определения фильтрационного расхода $q(t)$, а здесь дается метод нахождения $\delta(x, t)$ и $\zeta(x, t)$ в процессе фильтрации суспензии при произвольно заданном виде функции $q(t)$.

Уравнение баланса и уравнение состояния запишутся в этом случае, соответственно, в виде (²)

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = -B(t) \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = A\delta(1 - \zeta), \quad (2)$$

где

$$B(t) = \frac{f_0(1 - \varepsilon)}{q(t)}, \quad (3)$$

f_0 — начальная пористость фильтруемого грунта (скелета); ε — пористость осевшей массы; A — опытный параметр, характеризующий свойства пористой среды и суспензии в части их взаимодействия при задерживании мелких взвешенных частиц.

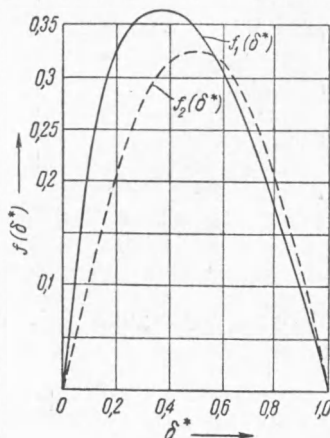


Рис. 1

Уравнения (1) и (2) решаются при следующих начальном и граничном условиях:

$$\zeta = 0 \text{ при } t = 0; \quad \delta = \delta_0 \text{ при } x = 0; \quad (4)$$

δ_0 — концентрация поступающей в грунт суспензии, предполагаемая постоянной. Из уравнений (1) и (2) имеем

$$\frac{\partial \ln \delta}{\partial x} = -AB(t)(1 - \zeta). \quad (5)$$

Дифференцируем обе части уравнения (5) по t . Тогда

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial x \partial t} = -A(1 - \zeta) \frac{\partial B(t)}{\partial t} + AB(t) \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (6)$$

Уравнение (6), если в него подставить значение $A(1 - \zeta)$ из (5) и выполнить некоторые преобразования, запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial x \partial t} - \frac{B'(t)}{B(t)} \frac{\partial \ln \delta}{\partial x} + A \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \ln \delta}{\partial t} - \frac{B'(t)}{B(t)} \ln \delta + A\delta \right] = 0. \quad (8)$$

Интегрирование уравнения (8) дает

$$\frac{\partial \ln \delta}{\partial t} - \frac{B'(t)}{B(t)} \ln \delta + A\delta = F(t). \quad (9)$$

Функция $F(t)$ определяется из граничного условия (4)

$$F(t) = A\delta_0 - \frac{B'(t)}{B(t)} \ln \delta_0. \quad (10)$$

Тогда уравнение (9), если обозначить δ/δ_0 через δ^* , запишется в виде

$$\frac{d\delta^*}{dt} + A\delta_0\delta^*(\delta^* - 1) - \frac{B'(t)}{B(t)}\delta^* \ln \delta^* = 0 \quad (11)$$

(здесь x принимаем за параметр).

Значение δ^* изменяется от 0 до 1, т. е. $0 \leq \delta^* \leq 1$. Легко видеть, что в этом интервале для δ^* функции $\delta^* \ln \delta^*$ и $\delta^*(\delta^* - 1)$ изменяются от нуля до нуля, пройдя через некоторый минимум.

Уравнение (11) может быть легко проинтегрировано, если функцию $\delta^* \ln \delta^*$ аппроксимировать функцией $c_1\delta^*(1 - \delta^*)$. Значение коэффициента c_1 определяется из условия наименьшей средней ошибки от аппроксимации и, как показали исследования, получается равным 1,3. На рис. 1 нанесены графики обеих функций при $c_1 = 1,3$ [$\delta^* \ln \delta^* = f_1(\delta^*)$ и $c_1\delta^*(1 - \delta^*) = f_2(\delta^*)$].

Уравнение (11) при указанной аппроксимации запишется в виде:

$$\frac{d\delta^*}{dt} = \delta^*(1 - \delta^*) \left[A\delta_0 - c_1 \frac{B'(t)}{B(t)} \right]. \quad (12)$$

Интегрирование уравнения (12) при начальном условии $\delta^*_{t=0} = e^{-AB_0x}$ ($B(t)_{t=0} = B_0$) (1) дает выражение для $\delta^*(x, t)$ в виде

$$\delta^*(x, t) = \frac{1}{1 + \exp \left[c_1 \ln \frac{B(t)}{B_0} + \ln (e^{AB_0x} - 1) - A\delta_0 t \right]}, \quad (13)$$

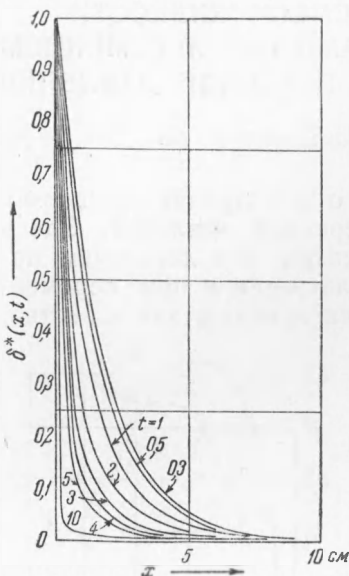


Рис. 2

$B_0 = f_0(1 - \varepsilon)/q_0$; q_0 — начальный единичный расход, являющийся известной величиной.

Для определения $\zeta(x, t)$ используем уравнение (2), из которого имеем

$$-\frac{d \ln(1 - \zeta)}{dt} = A\delta, \quad (14)$$

откуда

$$\zeta(x, t) = 1 - \exp \left[-A \int_0^t \delta^*(x, t) dt \right]. \quad (15)$$

Для примера берем следующие данные: $\delta_0 = 1 \cdot 10^{-3}$; $f_0 = 0,4$; $\varepsilon = 0,5$; $q_0 = 27$ см/час. Опытный параметр A получен равным 81 час^{-1} *. Тогда $B_0 = 0,0074 \text{ час/см}$; $AB_0 = 0,6 \text{ см}^{-1}$; $A\delta_0 = 0,081 \text{ час.}$, и для вычисления $\delta(x, t)$ и $\zeta(x, t)$ расчетные формулы напишутся в виде

$$\delta^*(x, t) = \frac{1}{1 + (e^{0,6x} - 1) e^{1,3 [3,299 - \ln q(t) - 0,081t]}}, \quad (16)$$

$$\zeta(x, t) = 1 - \exp \left[-81 \int_0^t \delta^*(x, t) dt \right].$$

На рис. 2 и 3 даны графики зависимости δ^* и ζ от x при фиксированных t (цифры при кривых означают время t в часах).

Следует отметить, что в фиксированном сечении x концентрация δ , как видно из рис. 2, несколько уменьшается во времени, а при постоянном расходе концентрация δ , как известно (2), увеличивается во времени. Физически это объясняется тем, что при постоянном расходе истинные скорости движения жидкости в поровых каналах увеличиваются во времени и некоторые мелкие частицы, ранее осевшие, начинают под действием этих скоростей срываться и попадать в поток.

Подобные явления наблюдались в наших опытах и в опытах В. П. Крыштал (4). Из практики известно, что степень очистки выходящей из песчаных фильтров жидкости во многих случаях ухудшается во времени.

В рассматриваемом здесь случае расход уменьшается с уменьшением размеров пор, а следовательно, вместе с ним уменьшаются и скорости движения жидкости, и поэтому осевшая частица остается лежать и уже в поток больше не попадает. Таким образом, мы видим, что изменение δ во времени в значительной мере зависит от поведения расхода, и при некоторых изменениях q концентрация δ будет оставаться постоянной во времени.

На рис. 4 даны кривые $\zeta = \text{const}$. Подобные кривые дают возможность быстро и просто решать некоторые важные для практики зада-

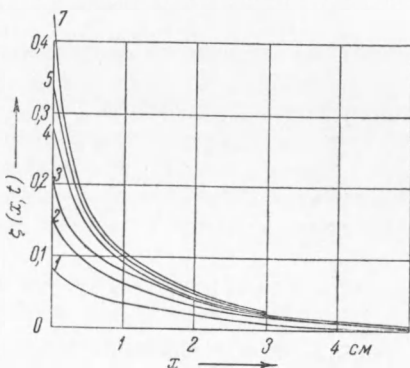


Рис. 3

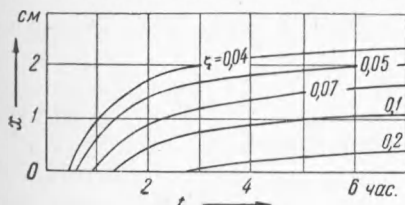


Рис. 4

* Метод определения параметра A дан в работе (2).

чи, как например: требуется определить время t , необходимое для заданной степени заиления грунта на заданной глубине, и др.

Институт механики
Академии наук СССР

Поступило
25 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. М. Шехтман, ДАН, 98, № 4 (1954). ² Ю. М. Шехтман, Инж. сборн. Инст. механики АН СССР, 14 (1953). ³ Ю. М. Шехтман, Изв. АН СССР, ОТН, № 2 (1953). ⁴ В. П. Крыштул, Кандидатск. диссертация, Акад. коммунал. хоз. им. Памфилова, 1952.