

С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 VII 1954)

Настоящая заметка посвящена установлению оценок фундаментальной матрицы решений параболической системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \sum_{\Sigma h_s \leq 2b} A_{ij}^{(h_1, h_2, \dots, h_n)}(t) \frac{\partial^{h_1+h_2+\dots+h_n}}{\partial x_1^{h_1} \partial x_2^{h_2} \dots \partial x_n^{h_n}} \quad (1)$$

($i = 1, 2, \dots, N$) и их применению к доказательству корректной разрешимости задачи Коши в классе неограниченных функций для параболических систем с коэффициентами, зависящими и от времени и от пространственных координат.

1. В основе получения оценок матрицы Грина системы (1) лежит теорема И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова о двойственности пространств Z_p^p и $Z_{p'}^{p'}$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$)⁽²⁾.

Запишем систему (1) в матричной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) U. \quad (1')$$

В соответствие (1) поставим систему уравнений

$$\frac{dV}{dt} = A(t, i\alpha) V. \quad (2)$$

Нормальную фундаментальную систему решений системы (2) обозначим $V(t, t_0, \alpha)$.

Используя методы⁽¹⁾, получаем:

Лемма 1. Если $A_{ij}^{(h_1, \dots, h_n)}(t)$ непрерывны, то для $V(t, t_0, \sigma + i\gamma)$ ($0 \leq t_0 < t \leq T$) справедлива оценка

$$|V(t, t_0, \sigma + i\gamma)| \leq C \exp\left[\left(-\frac{\delta}{4} |\sigma|^{2b} + K |\gamma|^{2b}\right)(t - t_0)\right] \quad (3)$$

($|\sigma| = \sqrt{\sum_{s=1}^n \sigma_s^2}$; C, K — положительные постоянные, зависящие лишь от T).

Из (3) следует, что целые функции n комплексных переменных $\sigma_1 + i\gamma_1, \dots, \sigma_n + i\gamma_n$, входящие в матрицу $V(t, t_0, \sigma + i\gamma)$, принадлежат классу Z_{2b}^{2b} . Исходя из того, что производные от матрицы Грина определяются формулой

$$D_m G(t, t_0, x) = \frac{1}{(2\pi)^n (t - t_0)^{\frac{n+m}{2b}}} \int \exp\left[i\left(\beta, \frac{x}{(t - t_0)^{1/2b}}\right)\right] V^*(t, t_0, \beta) d\beta, \quad (4)$$

$$V^*(t, t_0, \beta) = (i\beta_1)^{m_1} \dots (i\beta_n)^{m_n} V\left(t, t_0, \frac{\beta}{(t - t_0)^{1/2b}}\right),$$

из результатов ⁽²⁾ следует, что элементы матрицы $D_m G(t, t_0, x)$ как функции аргумента $\frac{x}{(t-t_0)^{1/2b}}$ принадлежат классу $Z_{p'}^{p'}\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{2b} = 1\right)$.

Отсюда следует:

Лемма 2. Имеют место оценки

$$|D_m G(t, t_0, x)| \leq \frac{c_m}{\frac{n+m}{2b}} \exp \left\{ -c |x| \frac{2b}{2b-1} / (t-t_0)^{\frac{1}{2b+1}} \right\} \quad (5)$$

(c и c_m — положительные постоянные, зависящие лишь от T).

Из оценок (5) следует единственность решения задачи Коши для системы (1) в классе функций $|U(x, t)| \leq M \exp \{k |x| \frac{2b}{2b-1}\}$ (^{2, 3, 4}), существование решения задачи Коши по начальным векторам $\varphi(x)$ из того же класса в полосе $t_0 < t < t_0 + \left(\frac{c}{k}\right)^{2b-1}$.

2. Рассмотрим параболическую систему

$$L(U) = \left[\frac{\partial}{\partial t} E - A\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right] U = 0, \quad (6)$$

где $A\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матричный дифференциальный оператор, содержащий производные порядка не выше $2b$ с комплексными непрерывными и ограниченными вместе со своими производными до порядка $2b+1$ по $x_1, \dots, x_n$ коэффициентами, зависящими от $x_1, \dots, x_n, t$ ($0 \leq t \leq T, -\infty < x < \infty$).

Пусть $A\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A_0\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + A_1\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, где в $A_0\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ входят производные порядка $2b$, а в $A_1\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — порядка $\leq 2b-1$. Система (6) называется параболической, если вещественные части корней λ уравнения $\det [A_0(t, x, i\alpha) - \lambda E] = 0$ ($|\alpha| = 1; -\infty < x_s < \infty, 0 \leq t \leq T$) удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda < -\delta$ ($\delta > 0$).

Построим фундаментальную матрицу решений системы (6) $Z(t, \tau, x, \xi)^*$. Обозначим через $G(t, \tau, x - \xi, y)$ матрицу Грина системы $\left[\frac{\partial}{\partial t} E - A(t, y, \frac{\partial}{\partial x}) \right] U = 0$ и, следуя Э. Э. Леви ⁽⁵⁾, $Z(t, \tau, x, \xi)$ будем искать в виде

$$Z(t, \tau, x, \xi) = G(t, \tau, x - \xi, x) + \int_{\tau}^t d\beta \int G(t, \beta, x - y, x) \varphi(\beta, \tau, y, \xi) dy. \quad (7)$$

Тогда относительно квадратной матрицы $\varphi(t, \tau, x, \xi)$ получим интегральное уравнение

$$K(t, \tau, x, \xi) + \varphi(t, \tau, x, \xi) + \int_{\tau}^t d\beta \int K(t, \beta, x, y) \varphi(\beta, \tau, y, \xi) dy = 0, \quad (8)$$

где

$$K(t, \tau, x, \xi) = L(G(t, \tau, x - \xi, x));$$

$$|K(t, \tau, x, \xi)| \leq \frac{C_1 \exp \left\{ -c |x - \xi| \frac{2b}{2b-1} / (t-\tau)^{\frac{1}{2b+1}} \right\}}{\frac{n+2b-1}{2b}}. \quad (9)$$

* Построением фундаментальной матрицы решений для параболических систем с коэффициентами, зависящими от пространственных координат, и решением задачи Коши в классе ограниченных функций занимался С. З. Брук ⁽⁶⁾.

Уравнение (8) имеет единственное решение, которое находим методом последовательных приближений. Основным для дальнейшего является оценка $D_1 \varphi(t, \tau, x, \xi)$ и $D_m Z(t, \tau, x, \xi)$. Используя (5) и справедливость для матрицы Грина $G(t, t_0, x)$ системы (1) формулы свертки $G(t, \tau, x - y) = \int G(t, \beta, x - \xi) G(\beta, \tau, \xi - y) d\xi$ ($\tau < \beta < t$), получаем

$$|D_m Z(t, \tau, x, \xi)| \leq \frac{C_m \exp \{-c^* |x - \xi|^{\frac{2b}{2b-1}} / (t - \tau)^{\frac{1}{2b-1}}\}}{(t - \tau)^{\frac{n+m}{2b}}}, \quad (10)$$

$m = 0, 1, \dots, 2b$ (C_m и c^* — положительные постоянные, зависящие лишь от T).

Из (7), (10) и результатов (1) следует

Теорема 1. Если непрерывная вектор-функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию $|\varphi(x)| \leq M e^{k|x|^1}$ (M и k — положительные постоянные), то $U(x, t) = \int Z(t, t_0, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$ представляет собой решение задачи Коши для системы (6) по начальной вектор-функции $\varphi(x)$, определенное в полосе $t_0 < t \leq t_0 + \left(\frac{c^* - \mu}{k}\right)^{2b-1}$, где μ — любая положительная

постоянная $< c^*$. При этом $|U| \leq M_1 \exp \{k_1 |x|^{\frac{2b}{2b-1}}\}$.

Если коэффициенты при производной $\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ в дифференциальном операторе $A\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ непрерывны и ограничены вместе со своими производными до порядка $k_1 + k_2 + \dots + k_n + 2b + 1$ по $x_1, x_2, \dots, x_n$, то можно построить фундаментальную матрицу решений $Z^*(\tau, t, x, \xi)$ ($t < \tau$) для системы, сопряженной к (6). $Z^*(\tau, t, x, \xi)$ будет при этом удовлетворять неравенствам (10).

Используя методы (1, 3, 4), откуда получаем:

Теорема 2 (единственности). Пусть непрерывная в слое $t_0 \leq t \leq T$ вектор-функция $U(x, t)$ удовлетворяет внутри этого слоя системе (6) и неравенству

$$\max_{t_0 \leq t \leq T} |U(x, t)| \leq M \exp \{k |x|^{\frac{2b}{2b-1}}\}. \quad (11)$$

Тогда, если $U(x, t_0) = 0$, то $U(x, t) \equiv 0$ при $t_0 \leq t \leq T$.

Теоремы 1 и 2 устанавливают равномерную корректность постановки задачи Коши для параболической системы (6) в классе функций (11).

Черновицкий
государственный университет

Поступило
6 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, в. 8 (1938). ² И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, 8, 6 (1953). ³ О. А. Ладыженская, Матем. сборн., 27, 3 (1950). ⁴ С. Д. Эйдельман, Матем. сборн., 33, 2 (1953). ⁵ Э. Э. Леви, Усп. матем. наук, 8 (1941). ⁶ С. З. Брук, ДАН, 60, № 1 (1948).