

Г. Ц. ТУМАРКИН

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ДРОБЯМИ С ЗАРАНЕЕ ЗАДАННЫМИ ПОЛЮСАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 VII 1954)

Пусть задана таблица комплексных чисел:

$$\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kN_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{причем } |\alpha_{ki}| \neq 1, \quad N_k \leq \infty; \quad (1)$$

(среди чисел таблицы (1) могут быть и равные между собой, а также α_{ki} могут равняться ∞).

Пусть $R_k(z)$ — рациональные дроби, все полюса которых — какие-либо числа, взятые из k -й строки таблицы (1):

$$R_k(z) = \frac{c_0 z^p + c_1 z^{p-1} + \dots + c_p}{(z - \alpha_{kn_1})(z - \alpha_{kn_2}) \dots (z - \alpha_{kn_p})}, \quad (2)$$

а $c_0, c_1, \dots, c_p$ — произвольные числа. (Если $\alpha_{ki} = \infty$, то в знаменателе (2) заменяем $z - \alpha_{ki}$ на 1.)

В дальнейшем те α_{ki} , для которых $|\alpha_{ki}| < 1$, будем обозначать через α'_{ki} ; те же, для которых $|\alpha_{ki}| > 1$, — через α''_{ki} . Рассмотрим вначале приближение последовательностями $\{R_k(z)\}$ функций $F(\zeta)$ в пространстве C , где C — пространство непрерывных на окружности $|\zeta| = 1$ функций $F(\zeta)$ с нормой $\|F\| = \max_{|\zeta|=1} |F(\zeta)|$. Тогда, как известно, для того, чтобы любую функцию $F(\zeta)$ можно было как угодно хорошо приблизить в C последовательностями $\{R_k(z)\}$ рациональных дробей вида (2), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S'_k = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S''_k = \infty, \quad (3)$$

где $S'_k = \sum_i (1 - |\alpha'_{ki}|)$, $S''_k = \sum_i (1 - |\alpha''_{ki}|^{-1})$, а суммирование распространяется на все соответствующие числа из k -й строки таблицы (1) (см., например, (5)).

Предположим теперь, что вместо (3) известно, что либо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S'_k < \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S''_k = \infty, \quad (4)$$

либо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S'_k = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S''_k < \infty. \quad (5)$$

Для формулировки получающихся тогда результатов нам понадобятся функции $\varphi(z)$ и $b^1(z)$, определение которых будет сейчас дано.

Обозначим через $b^1_k(z)$ произведение Бляшке, нулями которого являются все числа α'_{ki} из k -й строки таблицы (1) (если $S'_k = \infty$, то полагаем $b^1_k(z) = 0$); тогда нетрудно доказать, что $\mu(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \ln |b^1_k(z)|$ при

выполнении условия (4) будет субгармонической в круге $|z| < 1$ функцией $\neq -\infty$. Пусть $u(z)$ есть наименьшая гармоническая мажоранта функции $\mu(z)$ в круге $|z| < 1$; так как $\mu(z) \leq 0$, то $u(z) \leq 0$. Мы полагаем $\varphi(z) = e^{u(z)+iv(z)}$, где $v(z)$ — функция, сопряженная $u(z)$, а функцию $b^1(z)$ полагаем равной произведению Бляшке, нулями которого кратности r являются все такие числа α , что какую бы окрестность их не взять и какое бы число $M > 0$ ни задать, найдется такое K , что при $k > K$ либо $S'_k > M$, либо во взятой окрестности будет находиться не менее r чисел α'_{ki} из k -й строки таблицы (1).

Теорема 1. Если выполняется (4), то последовательностями $\{R_k(\zeta)\}$ можно как угодно хорошо приблизить в S такие и только такие функции $F(\zeta)$, которые совпадают почти всюду на $|\zeta| = 1$ с граничными значениями мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$ ограниченного вида, допускающих такое представление:

$$F(z) = \psi(z) [b^1(z) \varphi(z)]^{-1}, \quad (6)$$

где $\psi(z)$ — какая-либо ограниченная аналитическая в $|z| < 1$ функция.

Замечание 1. Если вместо (4) выполняется (5), то, очевидно, результат будет аналогичен приведенному.

Замечание 2. Случай, когда в таблице (1) все $|\alpha_{ki}| > 1$, рассмотрен в (5).

При дополнительных предположениях относительно чисел α'_{ki} таблицы (1) в ряде случаев оказывается возможным сразу же установить вид функций $b^1(z)$ и $\varphi(z)$. Для того чтобы сформулировать некоторые относящиеся сюда результаты, составим таблицу из чисел α'_{ki} таблицы (1), при этом мы будем располагать в k -й строке новой таблицы числа α'_{ki} из k -й строки таблицы (1), взятые в порядке возрастания их модулей:

$$\alpha'_{k1}, \alpha'_{k2}, \dots, \alpha'_{kN'_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Тогда, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N'_k} (1 - |\alpha'_{ki}|) < \varepsilon$, то $\varphi(z) \equiv 1$.

Отсюда, в частности, следует, что если таблица (7) имеет треугольный вид ($N'_k = k$), причем $\alpha'_{ki} = \alpha'_k$ при $i \geq k$, где $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha'_k|) < \infty$, то $\varphi(z) \equiv 1$, а $b^1(z)$ есть произведение Бляшке, нулями которого являются все числа $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_k, \dots$.

Рассмотрим теперь приближение в среднем функций $F(\zeta)$ последовательностями $\{R_k(\zeta)\}$. Пусть $\sigma(t)$ — неубывающая функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$. Обозначим через $L^p(d\sigma; 0, 2\pi)$, $p > 0$, множество всех комплекснозначных функций $F(e^{it})$, для которых существует интеграл Лебега — Стильеса: $\int_0^{2\pi} |F(e^{it})|^p d\sigma(t) < \infty$.

Если выполняется условие (3), то легко видеть, что для любой функции $F(\zeta) \in L^p(d\sigma; 0, 2\pi)$ найдется последовательность $\{R_k(\zeta)\}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |F(e^{it}) - R_k(e^{it})|^p d\sigma(t) = 0. \quad (8)$$

Это следует из того, что функция $F(e^{it})$ может быть как угодно хорошо приближена в $L^p(d\sigma; 0, 2\pi)$ непрерывными функциями, а не-

прерывные функции, как уже отмечалось, — последовательностями $\{R_k(e^{it})\}$.

Сделаем теперь вместо (3) более слабое предположение:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S'_k + S_k^*) = \infty. \quad (9)$$

Теорема 2. Пусть $\sigma(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} \log \sigma'(t) dt = -\infty \quad (10)$$

и выполняется условие (9). Тогда для любой функции $F(e^{it}) \in L^p(d\tau; 0, 2\pi)$, $p > 0$, найдется последовательность $\{R_k(z)\}$ рациональных дробей вида (2), удовлетворяющая условию (8).

Замечание. Частные случаи теоремы 2 были указаны в ряде работ. Так, известный результат о том, что условие (10) достаточно для замкнутости в $L^p(d\tau; 0, 2\pi)$ последовательности функций $\{e^{int}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, доказанный при $p = 2$ А. Н. Колмогоровым и М. Г. Крейном и при $p \geq 1$ Н. И. Ахиезером, получается из теоремы 2, если предположить что в таблице (1) все $\alpha_{ki} = \infty$ и $N_k = k$. Заметим вместе с тем, что доказательство теоремы 2 может быть проведено без особого труда, опираясь на уже известные результаты.

Если функция $\sigma(t)$ не удовлетворяет условию (10), т. е.

$$\int_0^{2\pi} \log \sigma'(t) dt > -\infty, \quad (11)$$

то оказывается, что одного выполнения даже равенства (4) — более сильного требования, чем (9), еще не достаточно, вообще говоря, для возможности как угодно хорошего приближения последовательностями $\{R_k(\zeta)\}$ любых функций $F(\zeta) \in L^p(d\tau; 0, 2\pi)$. Это будет немедленно следовать из теоремы 3, в которой устанавливается, что при выполнении условия (4) в $L^p(d\tau; 0, 2\pi)$ могут быть приближены последовательностями $\{R_k(\zeta)\}$ лишь граничные значения одного класса мероморфных в круге $|z| < 1$ функций.

Теорема 3. Если выполняются условия (4) и (11), то для того, чтобы для функции $F(\zeta) \in L^p(d\tau; 0, 2\pi)$, $p > 0$, существовала последовательность $\{R_k(\zeta)\}$, удовлетворяющая равенству (8), необходимо и достаточно, чтобы $F(\zeta)$ совпадала почти всюду на $|\zeta| = 1$ с граничными значениями мероморфной в круге $|z| < 1$ функции $F(z)$, которую можно представить в виде (6), где $b^1(z)$ и $\varphi(z)$ имеют то же значение, что и в теореме 1, а $\psi(z)$ есть аналитическая в круге $|z| < 1$ функция класса D^* .

Замечание. Доказанная нами ранее теорема (4), в которой давались необходимые и достаточные условия, при которых функция $F(\zeta)$ может быть как угодно хорошо приближена в $L^p(d\tau, 0, 2\pi)$ последовательностями многочленов $\{P_k(e^{it})\}$ от e^{it} , является частным случаем теоремы 3.

При помощи конформного отображения можно перенести приведенные выше результаты на случай приближения функций, определенных на замкнутой спрямляемой кривой, а также функций, определенных на действительной оси.

Из-за недостатка места ограничимся рассмотрением приближения функций, заданных на действительной оси.

* По поводу функции класса D см. (3), гл. II, § 6.

Пусть дана таблица (1) комплексных чисел, причем теперь $\operatorname{Im} \alpha_{ki} \neq 0$, и пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k^j = \infty$, $j = 1, 2$, где $S_k^j = \sum_i \frac{\operatorname{Im} \alpha_{ki}^j}{1 + |\alpha_{ki}^j|^2}$, а α_{ki}^1 — это те числа α_{ki} , которые лежат в верхней полуплоскости, а α_{ki}^2 — те, которые лежат в нижней полуплоскости; тогда для любой непрерывной на действительной оси функции $F(x)$ найдется последовательность $\{R_k(x)\}$ рациональных дробей вида (2), равномерно сходящаяся на действительной оси к $F(x)$ (см. (1, 2, 6)).

Теорема 4. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k^1 < \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k^2 = \infty$, то для того, чтобы для непрерывной функции $F(x)$ нашлась последовательность $\{R_k(x)\}$, равномерно сходящаяся к ней на действительной оси, необходимо и достаточно, чтобы $F(x)$ совпадала почти для всех x , $-\infty < x < \infty$, с граничными значениями мероморфной в верхней полуплоскости функции $F(z)$, которую можно представить в виде (6), где $\psi(z)$ — какая-либо ограниченная аналитическая в верхней полуплоскости функция, а $b^1(z)$ и $\varphi(z)$ — аналитические в верхней полуплоскости функции, определяемые так же как в теореме 1, но теперь $|b_k^1(z)| = \prod_i \left| \frac{z - \alpha_{ki}^1}{z - \overline{\alpha_{ki}^1}} \right|$ (при составлении произведения берутся сомножители, отвечающие всем числам α_{ki}^1 из k -й строки).

Подобным же образом формулируются теоремы о приближении функций $F(x)$ последовательностями $\{R_k(x)\}$ в пространстве $L^p(d\sigma; -\infty, \infty)$, $p > 0$, где расстояние между двумя функциями $F_1(x)$ и $F_2(x)$ оценивается величиной интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x) - F_2(x)|^p d\sigma(x)$, только теперь вместо $\int_0^{2\pi} \log \sigma'(t) dt$ появляется $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \sigma'(x)}{1+x^2} dx$.

Поступило
1 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М., 1947. ² С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937. ³ И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, 1950. ⁴ Г. Ц. Тумаркин, ДАН, 84, № 1 (1952). ⁵ J. B. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, N. Y., 1935. ⁶ H. Kober, Proc. Edinburgh Math. Soc., ser. 2, 7, 123 (1945—1946).