

С. Х. СИРАЖДИНОВ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 VII 1954)

1. Будем рассматривать однородную во времени цепь Маркова с непрерывным временем и возможными состояниями $e_1, e_2, \dots, e_s$ ($s > 1$). Процесс в этом случае вполне определяется ⁽¹⁾ заданием матрицы плотностей $A = \|a_{\alpha\beta}\|_1^s$ элементов $a_{\alpha\beta}$ — действительных чисел, удовлетворяющих условиям: $a_{\alpha\beta} \geq 0$ при $\alpha \neq \beta$ и $\sum_{\beta} a_{\alpha\beta} = 0$.

Пусть $\xi^{\alpha}(t)$ — продолжительность пребывания в состоянии e_{α} за время t . Очевидно, $\xi^1(t) + \dots + \xi^s(t) = t$. Будем изучать предельное распределение вероятностей s -мерного случайного вектора $\vec{\xi}(t) = (\xi^1(t), \dots, \xi^s(t))$. Распределение этого вектора, очевидно, не более чем $(s-1)$ -мерно.

Введем условие (А): Для любых двух состояний e_{α} и e_{β} из множества возможных состояний $e_1, e_2, \dots, e_s$ существует последовательность состояний $e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}, \dots, e_{\gamma_k}$ такая, что $a_{\alpha\gamma_1} a_{\gamma_1\gamma_2} \dots a_{\gamma_k\beta} > 0$.

В терминах А. Н. Колмогорова условие (А) означает, что множество возможных состояний $e_1, e_2, \dots, e_s$ образует один существенный класс. Заметим, что, в отличие от дискретного случая, здесь подклассов не бывает. По существу рассматриваемый нами случай является основным, заслуживающим внимания случаем.

2. В последующем равенство $e(t) = e_{\alpha}$ будет обозначать, что система в момент времени t находится в состоянии e_{α} .

Пусть $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ и $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ — действительные числа; $(\vec{\theta} | \vec{\xi})$ — скалярное произведение векторов $\vec{\theta}$ и $\vec{\xi}(t)$.

Пусть, далее, $\varphi_{\alpha}^{\beta}(\vec{\theta}, t)$ означает математическое ожидание величин $\exp(i(\vec{\theta} | \vec{\xi}))$ в предположениях $e(t) = e_{\beta}$ и $e(0) = e_{\alpha}$. Очевидно,

$$\varphi_{\alpha}(\vec{\theta}, t) = \sum_{\beta=1}^s \varphi_{\alpha}^{\beta}(\vec{\theta}, t) \quad (1)$$

будет характеристической функцией вектора $\vec{\xi}(t)$ при начальном условии $e(0) = e_{\alpha}$. Матрицу $\Phi(\vec{\theta}, t) = \|\varphi_{\alpha}^{\beta}(\vec{\theta}, t)\|_1^s$ назовем характеристической матрицей случайного вектора $\vec{\xi}(t)$. Нетрудно показать, что характеристическая матрица вектора $\vec{\xi}(t_1 + t_2) = \vec{\xi}(t_1) + \vec{\xi}(t_2)$ состоит из произведения характеристических матриц векторов $\vec{\xi}(t_1)$ и $\vec{\xi}(t_2)$, т. е. $\Phi(\vec{\theta}, t_1 + t_2) = \Phi(\vec{\theta}, t_1)\Phi(\vec{\theta}, t_2)$. Отсюда легко устанавливается, что матрица $\Phi(\vec{\theta}, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Phi(\vec{\theta}, t)}{\partial t} = \Phi(\vec{\theta}, t) A(\vec{\theta}),$$

где

$$A(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} a_{11} + i\theta_1 & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} + i\theta_2 & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} + i\theta_s \end{pmatrix} \quad (2)$$

При $\vec{\theta} = \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ матрица $A(\mathbf{0})$ совпадает с матрицей $A = \|a_{\alpha\beta}\|$. При начальном условии $\Phi(\vec{\theta}, 0) = E$, где E — единичная матрица s -го порядка, вышеупомянутое дифференциальное уравнение допускает единственное решение $\Phi(\vec{\theta}, t) = \exp(tA(\vec{\theta}))$.

Таким образом, предельное поведение (при $t \rightarrow \infty$) характеристической функции $\varphi_\alpha(\vec{\theta}, t)$, а следовательно, и предельное поведение распределения вероятностей вектора $\xi(t)$ благодаря соотношению (1) сводятся к изучению предельного поведения $\exp(tA(\vec{\theta}))$ при $t \rightarrow \infty$.

3. В формулируемой ниже лемме знаком M_γ будем обозначать условные математические ожидания при гипотезе $e(0) = e_\gamma$.

Лемма 1. Если соблюдено условие (A), то при $t \rightarrow \infty$

$$M_\gamma \xi^\alpha(t) = t\omega_\alpha + O(1), \quad M_\gamma(\xi^\alpha(t) - M_\gamma \xi^\alpha)(\xi^\beta(t) - M_\gamma \xi^\beta) = t\omega_{\alpha\beta} + O(1). \quad (1)$$

В этих соотношениях положено

$$\omega_\alpha = -i \left[\frac{\partial \Omega(\vec{\theta})}{\partial \theta_\alpha} \right]_{\vec{\theta}=\mathbf{0}}; \quad \omega_{\alpha\beta} = - \left[\frac{\partial^2 \Omega(\vec{\theta})}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta} \right]_{\vec{\theta}=\mathbf{0}},$$

где $\Omega(\vec{\theta})$ — собственное значение матрицы $A(\vec{\theta})$, введенной соотношением (2), которое при $\vec{\theta} \rightarrow \mathbf{0}$ стремится к нулю. Если $A_{\alpha\alpha}$ — минор определителя $|-A|$, соответствующий элементу $a_{\alpha\alpha}$, то $\omega_\alpha = A_{\alpha\alpha} / \sum_{\beta=1}^s A_{\beta\beta}$, и при соблюдении условия (A) для всех α $A_{\alpha\alpha} > 0$, следовательно, для всех α $\omega_\alpha > 0$. Числа ω_α являются финальными вероятностями состояний e_α . Если $A_{\alpha\beta|\alpha\beta}$ — главный минор $(s-2)$ -го порядка определителя $|-A|$, то, полагая $A_{\alpha\alpha|\alpha\alpha}$ и $R_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta|\alpha\beta} / \sum_{\alpha} A_{\alpha\alpha}$, $R_\alpha = \sum_{\beta} R_{\alpha\beta} = \sum_{\beta} R_{\beta\alpha}$; $R = \sum_{\alpha, \beta} R_{\alpha\beta}$, можно показать, что $\omega_{\alpha\beta} = \omega_\alpha \omega_\beta R - \omega_\alpha R_\beta - \omega_\beta R_\alpha + R_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, s$). Подобным образом можно вычислить и выразить через элементы матрицы A все частные производные функции $\Omega(\vec{\theta})$ в точке $\vec{\theta} = \mathbf{0}$. Размерность распределения случайного вектора $\xi = (t)$ определяется рангом квадратической формы

$$b(X) = \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta. \quad (3)$$

Если $\bar{x} = x_1 + \dots + x_s$ и $\bar{X} = (\bar{x}, \dots, \bar{x})$, то $b(X) = b(X - \bar{X})$. Поэтому форму $b(X)$ достаточно рассматривать в $(s-1)$ -мерном пространстве N векторов $X = (x_1, \dots, x_s)$ с $x_1 + x_2 + \dots + x_s = 0$.

Лемма 2. Выполнение условия (A) необходимо и достаточно для того, чтобы форма $b(X)$ была положительной в пространстве N , т. е. ранг формы $b(X)$ был равен $s-1$.

Если Δ — главный минор матрицы $\|\omega_{\alpha\beta}\|_1^s$ (заметим, что все главные миноры этой матрицы равны между собой), то при соблюдении условий (A) $\Delta > 0$ и форма $b(X)$ имеет в пространстве N обратную

форму, которую обозначим через $c(\mathbf{X}')$. Далее положим

$$\Psi(\mathbf{X}) = \frac{1}{V(2\pi)^{s-1} \Delta} e^{-c(\mathbf{X})/2}. \quad (4)$$

4. Введем вектор $\vec{\eta}(t) = (\eta^1(t), \eta^2(t), \dots, \eta^s(t)) = (\vec{\xi}(t) - t \vec{\omega})/\sqrt{t}$, где $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s)$. Очевидно, возможные значения вектора $\vec{\eta}(t)$ лежат в пространстве N . Пусть $F_t^{\gamma}(\mathcal{G}) = P(\vec{\eta}(t) \in \mathcal{G} | e(0) = e_{\gamma})$; здесь $\mathcal{G} \subset N$.

Теорема 1. Если соблюдено условие (A), то для любого целого $k > 0$ при $t \rightarrow \infty$

$$\sup_{\mathcal{G} \subset N} \left| F_t^{\gamma}(\mathcal{G}) - \int_{\mathcal{G}} \left[\Psi(\mathbf{X}) + \sum_{v=1}^h t^{-\frac{v}{2}} L_{\gamma^v} \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right) \Psi(\mathbf{X}) \right] d\mathbf{X} \right| = O \left(t^{-\frac{k+1}{2}} \right);$$

здесь $L_{\gamma^v}(\mathbf{X}) = L_{\gamma^v}(x_1, \dots, x_s)$ — полином с действительными коэффициентами от s переменных $x_1, \dots, x_s$ степени не выше $3v$. Эти полиномы определяются из формального разложения по степеням z функции

$B_{\gamma}(z\vec{\theta}) \exp \left\{ -\frac{1}{z^2} \left[\Omega(z\vec{\theta}) + \frac{z^2 b(\vec{\theta})}{2} - iz(\vec{\omega}\vec{\theta}) \right] \right\} = 1 + z L_{\gamma^1}(i\vec{\theta}) + z^2 L_{\gamma^2}(i\vec{\theta}) + \dots$,
а $B_{\gamma}(z\vec{\theta}) = \sum_{\alpha} A_{\gamma\alpha}(\vec{\theta}) / \sum_{\alpha} A_{\alpha\alpha}(\vec{\theta})$; $A_{\gamma\alpha}(\vec{\theta})$ означают миноры определителя $|E\Omega - A(\vec{\theta})|$. Функция $B_{\gamma}(\vec{\theta})$ в точке $\vec{\theta} = \mathbf{0}$ допускает ограниченные частные производные всех порядков и $B_{\gamma}(\vec{\theta}) = 1$.

Символ $L_{\gamma^v} \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right) \Psi(\mathbf{X})$ означает, что в полиноме $L_{\gamma^v}(\mathbf{X})$ выражения $x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_s^{v_s}$ нужно заменить на

$$(-1)^{v_1 + \dots + v_s} \frac{\partial^{v_1 + \dots + v_s} \Psi(\mathbf{X})}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_s^{v_s}}.$$

Заметим, что вычисление многочленов $L_{\gamma^v}(\mathbf{X})$ требует лишь знания конечного числа частных производных $\Omega(\vec{\theta})$ и $B_{\gamma}(\vec{\theta})$ в точке $\vec{\theta} = \mathbf{0}$; следовательно, они вычисляются эффективно и зависят только от матрицы $A = \|a_{\alpha\beta}\|_1^s$.

Прежде чем рассказать о доказательстве этой теоремы, заметим следующее. В отличие от дискретного случая, в непрерывном случае вероятностная функция $F_t^{\gamma}(\mathcal{G})$ будет состоять из двух компонент: абсолютно непрерывной и сингулярной

$$F_t^{\gamma}(\mathcal{G}) = \delta_1^{\gamma}(t) \bar{F}_t^{\gamma}(\mathcal{G}) + \delta_2^{\gamma}(t) \bar{\bar{F}}_t^{\gamma}(\mathcal{G}), \quad \delta_1^{\gamma}(t) + \delta_2^{\gamma}(t) = 1.$$

Здесь наличие сингулярной компоненты $\bar{\bar{F}}_t^{\gamma}(\mathcal{G})$ обусловливается тем, что с положительной вероятностью возможно попадание в множество $(s-1)$ -мерной лебеговской меры нуль пространства N . Так например, система, находясь в начальный момент времени в некотором состоянии e_{γ} с положительной вероятностью $e^{\alpha \gamma t}$, остается в этом состоянии в продолжение времени t .

При доказательстве теоремы 1 существенно наличие абсолютно непрерывной компоненты ($\delta_1^{\gamma}(t) > 0$) у вероятностной функции $F_t^{\gamma}(\mathcal{G})$. Это обстоятельство доказывается непосредственным подсчетом. При этом оказывается, что $\delta_2^{\gamma}(t) < \rho^t$, где $0 \leq \rho < 1$. Последнее показывает, что предельное поведение $F_t^{\gamma}(\mathcal{G})$ одинаково с предельным пове-

дением $\bar{F}_t^Y(\mathcal{G})$. Функция $\bar{F}_t^Y(\mathcal{G})$ может быть представлена в виде

$$\bar{F}_t^Y(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} w_t^Y(\mathbf{X}) d\mathbf{X},$$

где $w_t^Y(\mathbf{X})$ — плотность вероятности, соответствующей распределению $\bar{F}_t^Y(\mathcal{G})$. Утверждение теоремы 1 равносильно ⁽²⁾ утверждению, что

$$\int_N \left| w_t^Y(\mathbf{X}) - \Psi(\mathbf{X}) - \sum_{\nu=1}^k t^{-\frac{\nu}{2}} L_{\nu\nu} \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right) \Psi(\mathbf{X}) \right| d\mathbf{X} = O \left(t^{-\frac{k+1}{2}} \right).$$

Для доказательства последнего утверждения частично применяются рассуждения Ю. В. Прохорова ⁽³⁾, доказавшего подобную теорему для независимых одномерных случайных величин, и некоторые результаты из работы ⁽⁴⁾.

5. Пусть $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_s)$ — заданный вектор с действительными компонентами. Введем одномерную случайную величину $u(t)$, связанную с рассматриваемой системой, и положим $u(t) = h_\alpha$, если $e(t) = e_\alpha$.

Введем величину $u_t = \int_0^t u(\tau) d\tau$. Используя обозначения прошлых пунктов, случайную величину u_t , очевидно, можно представить в виде $u = (\vec{\xi} \vec{\eta}) = h_1 \xi^1(t) + \dots + h_s \xi^s(t)$. Следовательно, согласно лемме 1, $M_\gamma u_t = t(\mathbf{h}\vec{\omega}) + O(1)$ и $D_\gamma u_t = tb(\mathbf{h}) + O(1)$. Здесь знаком D_γ обозначена дисперсия при гипотезе $e(0) = e_\gamma$.

Введем условие (H): Среди чисел $h_1, \dots, h_s$ имеются, по крайней мере, два, не равные по величине.

При соблюдении условий (A) и (H) величина $\sigma^2 = b(\mathbf{h}) > 0$. Если $F_t^Y(A)$ — вероятностная функция одномерной случайной величины

$$\zeta(t) = \frac{(\mathbf{h}\vec{\xi}) - (\mathbf{h}\vec{\omega})}{\sqrt{t}\sigma}$$

в предположении $e(0) = e_\gamma$, то справедливо следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2. Если соблюдены условия (A) и (H), то для любого целого $k > 0$ при $t \rightarrow \infty$

$$\sup_A \left| F_t^Y(A) - \int_A \left[G(x) + \sum_{\nu=1}^k t^{-\frac{\nu}{2}} L_{\nu\nu} \left(-\frac{d}{dx} \right) G(x) \right] dx \right| = O \left(t^{-\frac{k+1}{2}} \right).$$

Здесь $G(x) = \exp(-x^2/2) / \sqrt{2\pi}$; $L_{\nu\nu}(x)$ — полиномы одной переменной x , которые с полиномами $L_{\nu\nu}(\mathbf{X})$ связаны соотношением $L_{\nu\nu}(x) = L_{\nu\nu}(x\mathbf{h})$; символ $L_{\nu\nu} \left(-\frac{d}{dx} \right) G(x)$ означает, что в полиноме $L_{\nu\nu}(x)$ выражения x^ν нужно заменить через $(-1)^\nu d^\nu G(x) / dx^\nu$.

Приведенная теорема 2 в значительной степени уточняет результат Деблина ⁽⁵⁾ и Т. Сарымсакова ⁽⁶⁾.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность А. Н. Колмогорову и Ю. В. Прохорову за ценные советы при решении приведенных задач.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
4 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Колмогоров, УМН, в. 5 (1938). ² А. Н. Колмогоров, Вестн. МГУ, 10, 29 (1953). ³ Ю. В. Прохоров, ДАН, 83, 797 (1952). ⁴ С. Х. Сираждинов, ДАН, 84, 1143 (1952). ⁵ W. Doeblin, Bull. Soc. Math. de France, 62 (1938). ⁶ Т. А. Сарымсаков, Тр. ИММ АН УзССР, в. 5 (1949).