

Н. Н. КРАСОВСКИЙ

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 VII 1954)

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где функции $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка во всем пространстве $-\infty < x_i < \infty$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и в точке $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ обращаются в нуль.

В заметке В. И. Зубова ⁽¹⁾ указывается, что для асимптотической устойчивости очевидного решения $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ системы (1) достаточно, чтобы симметризованная матрица Якоби

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) \right\}_{ik} \quad (2)$$

имела неположительные собственные числа*. Как следует из доказательства ⁽¹⁾, предполагается, очевидно, при этом, что собственные числа λ_i матрицы (2) должны быть неположительными и в том случае, если различные элементы матрицы вычисляются в разных точках области D , содержащей начало координат. Действительно, записывая систему (1) в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_i(\theta x_1, \theta x_2, \dots, \theta x_n)}{\partial x_j} x_j,$$

для различных функций X_i можно получить различные значения $\theta = \theta_i$.

Цель настоящей заметки — указать достаточные условия устойчивости решения $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ системы (1) в целом и доказать теорему, являющуюся обобщением некоторых фактов, указанных в статье ⁽¹⁾.

Обозначим через $\lambda_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ собственные числа матрицы (2) и

$$m^2(r) = \min \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2; \quad (3)$$

$$\lambda(r) = \min (|\lambda_1(x_1, x_2, \dots, x_n)|, \dots, |\lambda_n(x_1, x_2, \dots, x_n)|)$$

$$\text{при} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2. \quad (4)$$

* В заметке ⁽¹⁾ предполагается, что функции X_i зависят также от времени t .

Теорема 1. Для того чтобы сфера

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = R^2 \quad (5)$$

лежала в области притяжения G точки $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, достаточно, чтобы все собственные значения λ_i были отрицательны в каждой точке области

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R_1^2, \quad (6)$$

где число R_1 удовлетворяет неравенству

$$\int_R^{R_1} m(r) \lambda(r) dr > N \quad (7)$$

(здесь $2N = \max \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)$ при $\sum_{i=1}^n x_i^2 = R^2$).

Доказательство. Условия теоремы обеспечивают асимптотическую устойчивость решения $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ по Ляпунову⁽²⁾. Пусть теорема неверна и в области (5) есть точки, лежащие на границе G . Граница G состоит из целых траекторий⁽³⁾. Рассмотрим граничную точку p . Всякая особая точка q , лежащая в области (6), асимптотически устойчива, так как система первого приближения в этой точке q имеет характеристические корни с отрицательными действительными частями. Поэтому граничная точка p не является особой. Рассмотрим траекторию $f(p, t)$. Пусть при $t > 0$ $f(p, t)$ выходит из области (6), пересекает сферу (5) в точке $p_1 = f(p, t_1)$ и сферу (6) в точке $p_2 = f(p, t_2)$.

Вычислим dv/dt вдоль траекторий (1) для функции

$$2v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} X_j \right) = \sum_{i=1, j=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) X_i X_j. \quad (8)$$

Собственные значения формы, стоящей в правой части (8), отрицательны и не превышают $-\lambda(r)$ в каждой точке области (6); поэтому, интегрируя вдоль $f(p, t)$, получим

$$v(p_2) - v(p_1) \leq - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(r) \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) dt \leq - \int_{s_1}^{s_2} \lambda(r) m(r) ds$$

здесь ds — дифференциал дуги $f(p, t)$.

Вследствие неравенства $ds \geq dr$ и $v(p_1) \leq N$

$$v(p_2) - N \leq - \int_R^{R_1} \lambda(r) m(r) dr < -N,$$

что противоречит знакоположительности функции $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пусть $f(p, t)$ лежит целиком в области (6) при $t > 0$. Особые точки q в области (6) асимптотически устойчивы и, следовательно, изолированы, т. е. в области (6) может быть лишь конечное число особых точек. Граничная для G траектория $f(p, t)$ не может лежать в области притяжения особой точки q . Поэтому при наших предположениях траектория $f(p, t)$ при $t > 0$ должна лежать в области, где

dv/dt имеет отрицательный максимум, что, вследствие продолжимости $f(p, t)$ на интервал $0 < t < \infty$, противоречит знакоположительности v . Противоречие доказывает теорему.

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. Для того чтобы решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ системы (1) было асимптотически устойчивым в целом, достаточно, чтобы собственные числа λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) были отрицательны во всем пространстве $-\infty < x_i < \infty$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и

$$\int_0^{\infty} m(r) \lambda(r) dr = \infty. \quad (9)$$

Докажем теорему об устойчивости решения $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ системы (1) по Ляпунову.

Теорема 3. Если существует постоянная симметричная матрица $A = \{a_{ij}\}$, собственные значения которой μ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) положительны, и симметризованная матрица произведения

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

имеет в некоторой окрестности начала координат (за исключением самой точки $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$) отрицательные собственные числа λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Примечания. Если в начале координат $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ также выполняется неравенство $\lambda_i < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то теорема 3 есть следствие теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению ⁽⁴⁾. Если положить $A = E$, то из теоремы 3 следует, что для асимптотической устойчивости решения $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ достаточно, чтобы в окрестности начала координат матрица (2) имела отрицательные собственные числа. Теорему 3 можно обобщить на случай, когда в отдельных точках окрестности начала координат собственные числа λ_i обращаются в нуль.

Доказательство. Вычислим производную функцию

$$2v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1, j=1}^n a_{ij} X_i X_j \quad (10)$$

вдоль траекторий системы (1). Имеем

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1, h=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial x_h} \right) X_i X_h. \quad (11)$$

По условиям теоремы квадратичная форма, стоящая в правой части (11), есть определено-отрицательная функция, если $\sum_{i=1}^n X_i^2 \neq 0$. Если в окрестности начала координат нет особых точек системы (1), то функция (10) удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости ⁽⁴⁾.

Предположим, что в любой окрестности начала координат есть особые точки системы (1), отличные от $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

При условиях теоремы всякая особая точка (1), отличная от начала координат, асимптотически устойчива, т. е. является изолированной. Поэтому точку $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ можно окружить системой замкнутых поверхностей u_k , стягивающихся к этой точке и таких, что на u_k $\min v > 0$.

Вследствие $dv/dt \leq 0$ отсюда следует устойчивость решения $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Пусть $f(n, t)$ — траектория, лежащая на границе области притяжения некоторой особой точки q , лежащей в достаточно малой окрестности начала координат. Очевидно, $f(n, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ — последовательность точек, лежащих в области притяжения точки q и имеющих n предельной точкой.

Траектории $f(n_k, t)$ с достаточно большим номером k при $t > 0$ подходят произвольно близко к точке $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ и при $t \rightarrow \infty$ примыкают к точке q , что противоречит устойчивости решения $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Итак, в достаточно малой окрестности точки $x_1 = 0$ нет особых точек системы (1).

Теорема доказана.

Уральский политехнический
институт
им. С. М. Кирова

Поступило
15 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. И. Зубов, Прикладн. матем. и мех., 17, в. 4 (1953). ² И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, 1952. ³ Н. П. Еругин, Прикладн. матем. и мех., 15, в. 2 (1951). ⁴ А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950.