

И. К. ДАУГАВЕТ

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 VII 1951)

1. Пусть B — область m -мерного пространства с достаточно гладкой границей Γ .

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned}\Delta x - \lambda a(T)x &= y(T), & T \in B; \\ x(T) &= 0 & T \in \Gamma,\end{aligned}\tag{1}$$

где $T = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ — точка m -мерного пространства.

Будем считать, что λ не является собственным числом рассматриваемой задачи.

Пусть для решения задачи (1) используется метод Галеркина, т. е. решение ищется в виде:

$$x_n = \sum_{k=0}^n \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} c_k^{(k_1, \dots, k_m)} \varphi_k^{(k_1, \dots, k_m)}(T),$$

где

$$\varphi_k^{(k_1, \dots, k_m)}(T) = \Omega(T) t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_m^{k_m},$$

причем функция $\Omega(T)$ обладает следующими свойствами: 1) $\Omega(T)$ обращается в 0 на Γ и не обращается в 0 внутри B ; 2) $\text{grad } \Omega(T) \neq 0$ при $T \in \Gamma$; 3) $\Omega(T)$ достаточное число раз дифференцируема в $\bar{B}$. Коэффициенты $c_k^{(k_1, \dots, k_m)}$ находятся из системы:

$$\begin{aligned}& \sum_{k=0}^n \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} c_k^{(k_1, \dots, k_m)} \int_B (\Delta \varphi_k^{(k_1, \dots, k_m)} - \lambda a \varphi_k^{(k_1, \dots, k_m)}) \psi_i^{(i_1, \dots, i_m)} dB = \\ &= \int_B y \psi_i^{(i_1, \dots, i_m)} dB \quad (i = 0, 1, \dots, n; i_1 + i_2 + \dots + i_m = i);\end{aligned}$$

$\{\psi_i^{(i_1, \dots, i_m)}\}$ — некоторая фиксированная система функций.

2. Для исследования сходимости метода Галеркина применим общую теорию приближенных методов для линейных задач ⁽¹⁾; в дальнейшем используются обозначения этой работы.

В качестве пространства X мы будем брать множество функций, обращающихся в 0 на Γ и дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{B}$. Метрику в X будем определять так, что X — гильбертово пространство (полнота X не предполагается); $[x_1, x_2]_X$ — скалярное произведение в смысле метрики X , которое определяется ниже.

Y — множество функций $y(T)$, для которых уравнение $\Delta x = y$ имеет решение $x \in X$. Метрику Y будем вводить таким образом:

$$[y_1, y_2]_Y = [x_1, x_2]_X \quad (\Delta x_1 = y_1, \Delta x_2 = y_2).$$

Функции $\psi_i^{(i_1, \dots, i_m)}$ будем выбирать так, чтобы было:

$$\int_B y \psi_i^{(i_1, \dots, i_m)} dB = [y, \zeta_i^{(i_1, \dots, i_m)}]_Y,$$

где $\zeta_i^{(i_1, \dots, i_m)} \in Y'$ и линейно независимы.

В этом случае $q = O(\varepsilon_1)$, $p = O(\eta)$ (см. (1), гл. II, § 1, теоремы 1, 2).

В дальнейшем при оценке ε_1 и η используется теорема И. Ю. Харрик (2).

3. Введем метрику в X следующим образом:

$$[x_1, x_2]_X = - \int_B \Delta x_1 \cdot x_2 dB = \int_B \sum_{k=1}^m \frac{\partial x_1}{\partial t_k} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} dB,$$

$$\|x\|_X^2 = [x, x]_X.$$

В соответствии со сказанным в п. 2 положим $\psi_k^{(k_1, \dots, k_m)} = \varphi_k^{(k_1, \dots, k_m)}$.

Предполагая, что $a(T)$ ограничена вместе со своими первыми частными производными, и используя свойства функции Грина для задачи Дирихле, можно показать, что функция $x = \Delta^{-1}[a(T)x] \in X$ при $x \in X$ имеет первые частные производные, удовлетворяющие условию Липшица с показателем β , где $\beta < 1$ при $m = 2$ и $\beta < 1/2$ при $m = 3$. На основании теоремы И. Ю. Харрик (2) отсюда можно заключить, что функция $\tilde{x}$ может быть аппроксимирована функциями вида ΩP_n (P_n — полином степени не выше n) с приближением порядка $\frac{1}{n^\beta}$. Таким образом, $\varepsilon_1 = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$.

Если известно, что решение задачи (1) имеет k -е производные, удовлетворяющие условию Липшица ($k \geq 1$), то $\eta = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$. Это непосредственно следует из теоремы И. Ю. Харрик (2).

Если дифференциальные свойства решения неизвестны, можно считать $\eta = O(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. В предположении, что $y(T)$ — правая часть рассматриваемого уравнения имеет суммируемые с квадратом первые частные производные, можно показать, что $\varepsilon_2 = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$, и таким образом $\eta = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$.

Приближения, найденные по методу Галеркина, сходятся к «точному» решению в смысле принятой метрики так, что норма разности имеет порядок $O(\eta)$. В ряде случаев отсюда можно сделать вывод о равномерной сходимости (3).

4. Пусть $m = 2$. Введем в X метрику так:

$$[x_1, x_2]_X = \iint_B \Delta x_1 \Delta x_2 dt_1 dt_2, \quad \|x\|_X^2 = [x, x]_X.$$

Заметим прежде всего, что из сходимости в смысле введенной метрики непосредственно следует равномерная сходимость с той же скоростью.

В соответствии со сказанным в п. 2 положим $\psi_k^{(k_1, k_2)} = \Delta \varphi_k^{(k_1, k_2)}$.

В предположении, что $a(T)$ ограничена вместе со своими первыми и вторыми частными производными, мы получим, что $\varepsilon_1 = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$,

где $\beta < 1$. При доказательстве этого факта используется ограниченность оператора, рассматриваемого из L^2 в L^2 , сопоставляющего оператору Лапласа, взятому от некоторой функции, ее какую-либо вторую производную ⁽⁴⁾, а также теорема о вложении пространства $W_l^{(p)}$ в L^q ⁽⁵⁾.

Если $y(T)$ имеет k -е производные, суммируемые с квадратом ($k \geq 2$), то $\varepsilon_2 = O\left(\frac{1}{n^{k+\beta-2}}\right)$, и тогда приближения, получаемые по методу Галеркина, равномерно сходятся к «точному» решению со скоростью $\frac{1}{n^\beta}$.

Если нам известны дифференциальные свойства решения, то величину η , аналогично предыдущему, можно оценить непосредственно. Именно, если решение имеет k -е производные, удовлетворяющие условию Липшица, то $\eta = O\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right)$, и «приближенные» решения сходятся к «точному» со скоростью $\frac{1}{n^{k-1}}$.

Отметим, что в частном случае, когда $a(T) \equiv 0$, отсюда получается равномерная сходимость метода наименьших квадратов для задачи Дирихле для уравнения Пуассона, причем быстрота сходимости целиком определяется величиной ε_2 .

5. В той же метрике, что и в п. 4, рассмотрим применение метода Галеркина с теми же функциями $\psi_k^{(h_1, h_2)}$ к более общей задаче:

$$\Delta x - \lambda \left[b \frac{\partial x}{\partial t_1} + c \frac{\partial x}{\partial t_2} + ax \right] = y; \quad (2)$$

$$x(T) = 0 \quad \text{при } T \in \Gamma.$$

Используя тот факт, что в наших условиях стремление ε_1 к нулю равносильно полной непрерывности $b \frac{\partial x}{\partial t_1} + c \frac{\partial x}{\partial t_2} + ax$, рассматриваемого как оператор из X в Y , можно получить равномерную сходимость метода Галеркина с функциями $\psi_k^{(h_1, h_2)} = \Delta \varphi_k^{(h_1, h_2)}$ и для задачи (2) но без оценки быстроты сходимости. При этом на функции a , b и c следует наложить требование, чтобы они были ограничены вместе со своими первыми частными производными.

Результаты, изложенные в настоящей заметке, получены в дипломной работе автора, написанной под руководством проф. Л. В. Канторовича.

Ленинградский государственный
университет
им. А. А. Жданова

Поступило
1 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, 3, в. 6 (28), 89 (1948).
² И. Ю. Харрик, Приближение функций, обращающихся в 0 на границе области, функциями особого вида, Автореферат диссертации, Ленинградск. гос. унив., 1953.
³ В. П. Ильин, Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов, Автореферат диссертации, Ленинградск. гос. унив., 1951. ⁴ С. Г. Михлин, ДАН, 78, № 3 (1951). ⁵ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950.