

А. А. ГОЛЬДБЕРГ

О ДЕФЕКТАХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 20 V 1954)

1. Как известно, мероморфная функция может иметь дефектные значения в смысле Неванлинна не более чем для счетного множества точек. Однако мероморфные функции со счетным множеством дефектов не были построены, а гипотетические примеры таких функций мыслились как примеры функций бесконечного порядка (см., например, $(1, 2)$). Самым сильным результатом в этом направлении оставался пример Р. Неванлинна ((3) , стр. 91 и след.), показывающий, что мероморфная функция фиксированного конечного порядка может иметь сколь угодно большое конечное число дефектных значений. В этом пункте настоящей заметки мы построим простой пример, дополняющий указанный пробел теории распределения значений.

Теорема 1. *Произвольное счетное множество M точек на комплексной плоскости является множеством дефектных значений для некоторой мероморфной функции конечного порядка.*

Пусть $\{a_k\}$ — последовательность, имеющая множеством своих значений M , такая, что $|a_k| < Ck$. Искомой функцией является

$$f(z) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 2^{-k} \left\{ \exp \left[z \cdot 2^{-k} e^{i \frac{\pi}{2} (-2 + 2^{3-k})} \right] + \exp \left[z \cdot 2^{-k} e^{i \frac{\pi}{2} (-1 + 2^{2-k})} \right] \right\}^{-1}}{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left\{ \exp \left[z \cdot 2^{-k} e^{i \frac{\pi}{2} (-2 + 2^{3-k})} \right] + \exp \left[z \cdot 2^{-k} e^{i \frac{\pi}{2} (-1 + 2^{2-k})} \right] \right\}^{-1}}.$$

Мы покажем, что $T(r, f) < \text{const} \cdot r$ и $\delta(a_k, f) > 0$, $k = 1, 2, \dots$; тем самым будет доказана теорема. Рассмотрим функцию $\varphi(x; \theta, \delta) = \left\{ \exp \left[z e^{i \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \delta \right)} \right] + \exp \left[z e^{i \left(\frac{3\pi}{2} - \theta - \delta \right)} \right] \right\}^{-1}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$. Она имеет простые полюсы в точках $p_n = e^{i\theta} \frac{(2n+1)\pi}{2 \cos \delta}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, если $0 \leq \delta < \pi/2$. Обозначим область $D_{\theta, \delta} = \{ |\arg z - \theta| < \delta \}$. Нетрудно показать, что в областях $D_{\theta - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \delta - \varepsilon}$ и $D_{\theta + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \delta - \varepsilon}$, $0 < \delta + \varepsilon < \pi/2$, имеет место оценка $|\varphi(z; \theta, \delta)| < A(\varepsilon)$, а в круге $|z| < 1$: $|\varphi(z; \theta, \delta)| < A$, где A и $A(\varepsilon)$ не зависят от θ и δ . В области $D_{\theta, \delta - \varepsilon}$ $|\varphi(z; \theta, \delta)| > K e^{|z| \sin \varepsilon}$, где K не зависит от θ и δ .

Пусть $\varphi_k(z) = \varphi[z \cdot 2^{-k}; \pi(2 - 3 \cdot 2^{-k}), \pi \cdot 2^{-k}]$. Построим функции $\Psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varphi_k(z)$ и $\Psi(z; \{a_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k} \varphi_k(z)$. Можно показать, что

оба ряда абсолютно сходятся в конечной z -плоскости без точек, соответствующих полюсам φ_k , и что

$$T(r, \Psi) \leq \sum_{k=1}^{[\log_2 r]} T(r, \varphi_k) + O(\ln r) < \text{const} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r}{2^k} + O(\ln r) < \text{const} \cdot r.$$

Наша функция $f(z) = \Psi(z; \{a_k\})$: $\Psi(z)$, следовательно, $T(r, f) < \text{const} \cdot r$. С другой стороны, в области $D_{\pi(2-\varepsilon)z^{-x}, \pi \cdot z^{-x}-\varepsilon}$, $x = 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|f(z) - a_x|} &= \frac{\left| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varphi_k(z) \right|}{\left| \sum_{k=1}^{x-1} (a_k - a_x) 2^{-k} \varphi_k(z) + \sum_{k=x+1}^{\infty} (a_k - a_x) 2^{-k} \varphi_k(z) \right|} > \\ &> \frac{2^{-x} |\varphi_x(z)| - 2A(\varepsilon)}{C_1 A(\varepsilon)} \geq C_2 \cdot 2^{-x} K e^{\frac{r}{2^x} \sin \varepsilon}. \end{aligned}$$

Такое же неравенство имеет место и для $x=1$ в области $D_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}-\varepsilon}$ с выключенными изолированными кружками $|z - p_n| < r_n$, $r_n \rightarrow 0$, с центрами в простых полюсах p_n функций $\varphi_k(z)$.

Следовательно, $m(r, a_x, f) > 2\left(\frac{\pi}{2^x} - \varepsilon\right) \frac{r \sin \varepsilon}{2^x} (1 + o(r))$ и $\delta(a_x, f) > 0$, $x = 1, 2, \dots$.

Отметим, что вопрос о том, может ли иметь целая функция конечного порядка бесконечное множество дефектных значений, остается открытым.

2. В этом пункте мы выделим из класса мероморфных функций рода нуль подкласс, обладающий определенным экстремальным свойством по отношению к величине дефектов, что позволит получить в качестве простых следствий обобщения ряда известных теорем.

Пусть

$$f(z) = \frac{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_v}\right)}{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_v}\right)}, \quad \hat{f}(z) = \frac{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{|a_v|}\right)}{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{|b_v|}\right)}.$$

Теорема 2. *Имеют место неравенства*

$$\delta(\infty, \hat{f}) \geq \delta(\infty, f); \quad \delta(0, \hat{f}) \geq \delta(0, f).$$

Эта теорема позволяет оценки сверху для дефектов $\hat{f}(z)$ переносить на все функции $f(z)$.

Следствие 1. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция порядка $0 \leq \rho \leq 1/2$ и на каждой окружности $|z| = r \geq r_0$ существует точка $z(r)$ такая, что $|f(z(r)) - a| \geq \varepsilon > 0$. Тогда $\delta(a) \leq 1 - \cos \pi \rho$. При этом для функции $f(z) = \prod_{v=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1/2\rho} + \sqrt{z}}{\sqrt{1/2\rho} - \sqrt{z}} + \prod_{v=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1/2\rho} - \sqrt{z}}{\sqrt{1/2\rho} + \sqrt{z}}$, ограниченной на отрицательной полуоси, $\delta(\infty) = 1 - \cos \pi \rho$.

Так как при линейном преобразовании функции дефекты не меняются, можно считать $a = \infty$. Если $\min_{|z|=r} |f(z)| < A$, $r_0 \leq r < \infty$, то $|\hat{f}(z)| < A$ на положительной полуоси. Для таких $\hat{f}(z)$ применима оценка Тайхмюллера ⁽⁴⁾: $\delta(\infty, \hat{f}) \leq 1 - \cos \pi \rho$. Для общего случая Тайхмюллер при более стеснительных ограничениях на $f(z)$ получает

более слабую оценку $\delta(a) \leq \frac{1 - \cos \pi \rho}{1 - k \cos \pi \rho}$, $0 \leq k < 1$. Пример, показывающий, что полученная нами оценка не может быть улучшена, взят из (4).

Следствие 2. Если у мероморфной функции порядка $0 \leq \rho < 1/2$, $\delta(a, f) > 1 - \cos \pi \rho$, то существует последовательность окружностей $|z| = r_n$, $r_n \rightarrow \infty$, на которой $f(z)$ равномерно стремится к a ; это a , следовательно, является единственным дефектным значением $f(z)$.

Это следствие, являющееся перефразировкой следствия 1, можно рассматривать, как обобщение теоремы Вимана (см., например, (5), стр. 301), утверждающей наличие указанной последовательности окружностей для целых функций порядка $< 1/2$. Оно содержит как частные случаи также следующие теоремы Валирона и Неванлинна, полученные из иных соображений: a является единственным дефектным значением $f(z)$, если: 1) $\rho = 0$, $\delta(a) > 0$ (см. (6)); 2) $\rho < 1/2$, $\delta(a) = 1$ (см. (3), стр. 55).

Следствие 3. Для целой функции $g(z)$ порядка ρ , $1 \geq \rho \geq 1/2$,

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a)^k \leq 1 - \cos \frac{\pi \rho}{2}.$$

(Целая функция порядка $\rho < 1/2$, как известно, не имеет конечных дефектных значений.) Для доказательства используется соотношение $\delta(0, g'(z)) \geq \sum_{a \neq \infty} \delta(a, g(z))$ (7), результаты Тайхмюллера (4) и то обстоятельство, что $|g'(z)| \geq 1$ для $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Полученная оценка точнее, чем у Шаха (8), доказавшего $\delta(a, g) \leq \rho$.

Следствие 4. Если у мероморфной функции $f(z)$ порядка $0 \leq \rho \leq 1$ $|a_\nu| = |b_\nu|$, $\nu = 1, 2, \dots$, то $\delta(0, f) \leq 1 - \cos \frac{\pi \rho}{2}$, $\delta(\infty, f) \leq 1 - \cos \frac{\pi \rho}{2}$. При этом для функции $f(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{v^{1/\rho} + z}{v^{1/\rho} - z}$ $\delta(0) = \delta(\infty) = 1 - \cos \frac{\pi \rho}{2}$ (см. (4)).

Следствие 5. Для целой функции $g(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{v^{1/\rho} e^{i\theta_\nu}}\right)$, $0 \leq \theta_\nu \leq 2\pi$, $\delta(0) \leq 1 - \sin \pi \rho$. При этом, если $\theta_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \dots$, $\delta(0) = 1 - \sin \pi \rho$ (см. (3), стр. 19).

Следствие 6. В классе мероморфных функций порядка ρ , автоморфных по отношению к группе вращений $T(z) = e^{i \frac{2\pi}{q} z}$, $q \geq [\rho + 1]$, с фиксированными модулями нулей и полюсов, максимальные значения дефектов $\delta(0)$ и $\delta(\infty)$ достигаются у функции, у которой нули лежат на лучах $\arg z = \frac{2\pi}{q} \nu$, а полюсы — на лучах $\arg z = \frac{2\pi}{q} \nu + \frac{\pi}{q}$, $\nu = 1, \dots, q$.

Поступило
6 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Le-Van-Thiem, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup., 67, 51 (1950). ² G. af Hällström, Acta Acad. Aboensis, M.—Ph., 18, No. 8, 1 (1952). ³ R. Nevanlinna, Le théorème de Picard—Borel et la théorie des fonctions méromorphes, 1929. ⁴ O. Teichmüller, Deutsche Math., 4, 163 (1939). ⁵ Е. Титчмарш, Теория функций, 1951. ⁶ G. Valiron, C. R., 230, 40 (1950). ⁷ E. Ullrich, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Ph.-M. Kl., 27, 592 (1929). ⁸ S. M. Shah, Math. Student, 12, 67 (1944).