

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ЗАМКНУТОМ КРУГЕ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 22 VII 1954)

1. Если функция $\varphi(z) = \varphi(re^{i\theta})$ непрерывна при $r \leq 1$, то через $\omega(\delta; \varphi)$ обозначим ее модуль непрерывности при $r = 1$, т. е.

$$\omega(\delta; \varphi) = \sup |\varphi(e^{i\theta_1}) - \varphi(e^{i\theta_2})|, \quad |\theta_1 - \theta_2| \leq \delta; \quad (1)$$

в частности, через Λ обозначим класс функций $\{\varphi(z)\}$, для которых существует интеграл*

$$\int_0^a \frac{\omega(x; \varphi)}{x} dx; \quad (2)$$

если через D_α обозначить класс функций Дини — Липшица, для которых

$$\omega(\delta; \varphi) \leq \frac{C}{\left(\lg \frac{c}{\delta}\right)^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad c > \pi, \quad (3)$$

то $D_\alpha \subset \Lambda$ при $\alpha > 1$.

Теорема 1. Пусть функция $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ регулярна при $r < 1$, а функция $u(r, \theta)$ непрерывна при $r \leq 1$, причем $u(r, \theta) \in \Lambda$ в таком случае функция $v(1, \theta)$ также непрерывна, причем $\omega(\delta; v) \leq \omega_0(\delta)$, где

$$\omega_0(\delta) \leq C_1 \int_0^\delta \frac{\omega(x; u)}{x} dx + C_2 \delta \int_\delta^1 \frac{\omega(x; u)}{x^2} dx^{**}. \quad (4)$$

Формула (4) приведена в работе (5). В частности, из (4) вытекает, что, если $u(1, \theta) \in D_\alpha$, $\alpha > 1$, то $v(1, \theta)$, $f(e^{i\theta}) \in D_{\alpha-1}$.

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема, являющаяся обобщением известной теоремы Келлога (см., например, (4), стр. 468—469).

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$ конформно отображает область, ограниченную замкнутой гладкой кривой Жордана C , на круг $|z| < 1$; пусть $\theta(s) \in \Lambda$, где θ — угол, образуемый вещественной осью с касательной к C в точке с дуговой координатой s ***. Тогда на $|z| = 1$ функции $f'(z)$, $\lg f'(z)$ имеют модуль непрерывности $\omega(\delta) \leq \omega(\delta; \theta) + \omega_0(\delta)$ ****.

Для доказательства заметим, что из условия $\theta(s) \in \Lambda$ вытекает по (6), что $f'(z) \neq 0$ и непрерывна на $|z| = 1$, откуда

$$|s_1 - s_2| = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |f'(e^{i\varphi})| d\varphi \leq C |\varphi_1 - \varphi_2|;$$

* Этот класс рассмотрен Л. Г. Магнарадзе (1, 2).

** Г. М. Голузин (4) доказал при условиях теоремы ограниченность функции $f(z)$ при $|z| < 1$; из теоремы 1 вытекает ее непрерывность на $|z| = 1$, причем $\omega(\delta; f) \leq \omega(\delta; u) + \omega_0(\delta)$.

*** Угол θ рассматриваем как функцию дуги s .

**** $\omega_0(\delta)$ дается формулой (4) после замены $\omega(x; u)$ на $\omega(x; \theta)$.

так как функция $\arg f'(z)$ непрерывна при $|z| \leq 1$, а на $|z| = 1$ имеем $\arg f'(z) = \theta - \arg z - \frac{\pi}{2}$, то легко находим

$|\arg f'(e^{i\varphi_1}) - \arg f'(e^{i\varphi_2})| \leq (|s_1 - s_2|; \theta) + |\varphi_1 - \varphi_2| \leq C' \omega(|\varphi_1 - \varphi_2|; \theta)$; после этого применяем теорему 1 к функции $-i \lg f'(z)$ *.

2. Теорема 3. Если функция $f(z)$ регулярна при $|z| < 1$, непрерывна при $|z| \leq 1$ и имеет на $|z| = 1$ модуль непрерывности $\omega(\delta)$, то

$$|f'(z)| \leq C \frac{\omega \left[(1-r) \lg \frac{c}{1-r} \right]}{1-r}, \quad |z| = r < 1. \quad (5)$$

Для доказательства применяем теорему Коши и находим (см., например, (4), стр. 453—454)

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|f(e^{i(\varphi+\alpha)}) - f(e^{i\varphi})|}{1-2r \cos \alpha + r^2} d\alpha \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\omega(\alpha) d\alpha}{(1-r)^2 + \frac{4r\alpha^2}{\pi^2}}, \quad z = re^{i\varphi}, \quad (6)$$

пользуясь неравенством $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(\delta)$, $\lambda > 0$, где мы положили

$$\lambda = \frac{\pi^2}{2Vr \lg \frac{c}{1-r}}, \quad \delta = (1-r) \lg \frac{c}{1-r},$$

приходим к (5) ⁽⁸⁾.

Теорема 3 доказана Харди и Литтльвудом ⁽⁷⁾ для $f(e^{i\theta}) \in \text{Lip } \alpha$, $\alpha \leq 1$; ими найдена для этого случая оценка (5) без дополнительного множителя $\lg \frac{c}{1-r}$. Если же $f(e^{i\theta}) \in D_\alpha$, то из (5) вытекает оценка

$$|f'(z)| \leq \frac{C}{(1-r) \left(\lg \frac{c}{1-r} \right)^\alpha}, \quad |z| = r < 1, \quad (7)$$

найденная М. Б. Гагуа ⁽³⁾.

Теореме 3 до некоторой степени обратна следующая теорема:

Теорема 4. Если функция $f(z)$ регулярна при $|z| < 1$ и удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leq \psi(1-r), \quad |r| = r < 1, \quad (8)$$

где функция $\psi(x)$ безгранично возрастает вместе с $1/x$, причем существует интеграл

$$\int_0^a \psi(x) dx,$$

то функция $F(z)$, первообразная по отношению к $f(z)$, удовлетворяет в замкнутом круге $|z| \leq 1$ неравенству

$$|F(z_1) - F(z_2)| \leq C\lambda(2|z_1 - z_2|), \quad \lambda(x) = \int_0^x \psi(x) dx. \quad (9)$$

Доказываем сперва (9) для точек, лежащих на одном радиусе; затем рассматриваем точки $z_1 = e^{i\theta_1}$, $z_2 = e^{i\theta_2}$ и пользуемся неравенством

$$|F(e^{i\theta_1}) - F(e^{i\theta_2})| \leq \int_I |f(z)| |dz|, \quad (10)$$

* Теорема Келлогга получается, если положить $\omega(\delta; \theta) \leq C\delta^\alpha$, $\alpha < 1$.

где контур l состоит из отрезков радиусов, соединяющих точки $e^{i\theta_1}$, $re^{i\theta_1}$ и точки $re^{i\theta_2}$, $e^{i\theta_2}$, и из дуги, соединяющей точки $re^{i\theta_1}$, $re^{i\theta_2}$; отсюда легко получить (9).

Если $\psi(x) = Cx^{\alpha-1}$, то из (9) получим теорему Харди и Литтльвуда (7); при

$$\psi(x) = \frac{C}{x \left(\lg \frac{c}{x} \right)^\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad (11)$$

получим результат М. Б. Гауга (3).

Теорема 5. При условиях теоремы 3 имеем в замкнутом круге

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq C\omega \left[|z_1 - z_2| \lg \frac{c}{|z_1 - z_2|} \right]. \quad (12)$$

Для доказательства пользуемся интегралом Пуассона

$$|f(re^{i\varphi}) - f(e^{i\varphi})| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2) |f(e^{i\theta}) - f(e^{i\varphi})|}{1-2r \cos(\theta-\varphi) + r^2} d\theta;$$

так как он лишь множителем $1-r^2$ отличается от (6), то, применяя те же рассуждения, что и в теореме 3, докажем (12) для точек $z_1 = re^{i\varphi}$, $z_2 = e^{i\varphi}$, если же $z_1 = r_1 e^{i\varphi}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi}$, $r_1 < r_2$, то, полагая $r_1 = r_2 \rho$, получим

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq C\omega \left[(1-\rho) \lg \frac{c}{1-\rho} \right],$$

откуда вытекает справедливость (12) для точек на одном радиусе; для точек $re^{i\varphi_1}$, $re^{i\varphi_2}$ доказываем (12), пользуясь принципом максимума; после этого легко доказать (12) в общем случае.

При $f(e^{i\theta}) \in \text{Lip } \alpha$, $\alpha \leq 1$, теорема была доказана Харди и Литтльвудом (7), причем в этом случае в (12) не будет множителя $\lg \frac{c}{|z_1 - z_2|}$, при $f(e^{i\theta}) \in D_\alpha$ получаем из (12) результат М. Б. Гауга (3).

Харьковский
авиационный институт

Поступило
24 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН Груз.ССР, 8, 8, 509 (1947). ² Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН Груз.ССР, 8, 9-10, 591 (1947). ³ М. Б. Гауга, Сообщ. АН Груз.ССР, 10, 8, 451 (1947). ⁴ Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1952. ⁵ J. Walsh, H. Margaret Elliot, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 38, 1058 (1952). ⁶ S. Warschawski, Math. Zs., 35, 321 (1932). ⁷ G. H. Hardy, J. E. Littlewood, ibid., 34, 403 (1932). ⁸ И. П. Натансон, ДАН, 72, № 1 (1950).