

С. А. ГЕЛЬФЕР

ВАРИАЦИЯ МНОГОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 19 VII 1954)

1. М. Шифферу принадлежат два типа вариаций однолистных функций. Один из них, основанный на вариации функции Грина, применим и к многолистным функциям ⁽¹⁾.

В настоящей заметке дается другой метод получения вариационных формул весьма общего вида для многолистных функций. Этим методом определение вариации многолистной функции сводится к определению вариации функции, отображающей круг на однолистную область в плоскости униформизирующей переменной. Последнюю мы будем получать по следующей теореме Г. М. Голузина ⁽²⁾.

Если функция $Z = Z(\zeta)$, $Z(0) = 0$, регулярна и однолистка в круге $|\zeta| < 1$, а функция $Z^* = F(\zeta, \lambda)$, как функция от ζ и λ , регулярна при $|\lambda| < \lambda_0$ и $r \leq |\zeta| < 1$, и при каждом λ , $0 < \lambda < \lambda_0$, она однолистка в $r \leq |\zeta| < 1$; если, кроме того, при каждом ζ , $r \leq |\zeta| < 1$, и малых λ имеем

$$F(\zeta, \lambda) = Z(\zeta) + \lambda q(\zeta) + O(\lambda^2), \quad (1)$$

то, прибавляя к образу кольца $r \leq |\zeta| < 1$ при отображении функцией $Z^* = F(\zeta, \lambda)$ область внутреннюю по отношению к образу окружности $|\zeta| = r$, при малом λ получим односвязную область Δ^* , содержащую точку $Z^* = 0$, и для функции $Z^* = Z^*(\zeta)$, $Z^*(0) = 0$, однолистно отображающей круг $|\zeta| < 1$ на Δ^* , имеем в $|\zeta| < 1$:

$$Z^*(\zeta) = Z(\zeta) + \lambda q(\zeta) - \lambda \zeta Z'(\zeta) S(\zeta) + \lambda \overline{\zeta Z'(\zeta)} \overline{S\left(\frac{1}{\zeta}\right)} + O(\lambda^2), \quad (2)$$

где $S(\zeta)$ — сумма членов с отрицательными степенями ζ в разложении функции $q(\zeta)/\zeta Z'(\zeta)$ в кольце $r < |\zeta| < 1$ в ряд Лорана.

2. Выведем вариационные формулы в классе $F_p^g(a_1, \dots, a_m)$ многолистных функций. Функция $z = f(\zeta) \in F_p^g(a_1, \dots, a_m)$, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) $f(\zeta)$ регулярна в круге $|\zeta| < 1$, $f(0) = 0$; 2) $f(\zeta)$ отображает $|\zeta| < 1$ взаимно-однозначно на область D , лежащую на какой-нибудь p -листной алгебраической римановой поверхности R , жанр γ которой не превосходит фиксированного числа g , причем все функции, отображающие $|\zeta| < 1$ на области одной и той же римановой поверхности, переводят точку $\zeta = 0$ в одну и ту же точку поверхности, лежащую над точкой $z = 0$; 3) $f(\zeta)$ выпускает в $|\zeta| < 1$ заданную систему значений $a_1, \dots, a_m$.

Построим универсальную поверхность наложения для R ; обозначим ее $\overline{\overline{R}}$ (если R имеет жанр $\gamma = 0$, то $\overline{\overline{R}}$ совпадает с R). Так как область D односвязна, то на $\overline{\overline{R}}$ ей будет соответствовать также односвязная область. $\overline{\overline{R}}$ отображается взаимно-однозначно и, за исключением отдельных точек, конформно на полную плоскость, если $\gamma = 0$; на плоскость с выключенной бесконечно удаленной точкой, если $\gamma = 1$;

на внутренность единичного круга, если $\gamma \geq 2$. Функция, обратная к производящей это отображение,

$$z = \Phi(Z), \quad \Phi(0) = 0, \quad (3)$$

будет при $\gamma = 0$ рациональной функцией от Z порядка p , а при $\gamma \geq 1$ — автоморфной функцией, принадлежащей группе T_n дробно-линейных преобразований, изоморфной группе преобразований $\bar{R}$ в себя.

3. Пусть $\gamma = 0$. Положим, что точки $z = a_1, \dots, a_m, \infty$ посредством преобразования (3) переходят в точки $Z = A_k$ ($k = 1, \dots, N$; $N \leq p(m+1)$). Можно преобразование (3) выбрать так, чтобы одна из точек поверхности R , покрывающих точку $z = \infty$, перешла в $Z = \infty$. Регулярная в круге $|\zeta| < 1$ функция

$$Z(\zeta) = \Phi^{-1}(f(\zeta)) \quad (4)$$

отображает $|\zeta| < 1$ на односвязную однолиственную область Δ , содержащую точку $Z = 0$ и не покрывающую точек A_k ($k = 1, \dots, N$). Рассмотрим функцию

$$Z^* = Z + hZ \prod_{k=1}^{N-1} \frac{Z - A_k}{Z - Z_k} = Z + hZ \left(1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{B_k}{Z - Z_k} \right), \quad (5)$$

где Z_k — какие-либо конечные точки на плоскости Z .

Эта функция при любом $\rho > 0$ и достаточно малом по модулю комплексном h однолистка в бесконечной области, представляющей собой внешность $N-1$ кругов $|Z - Z_k| = \rho$ (2). Пусть $f(\zeta) \in F_p^0(a_1, \dots, a_m)$. Если точки Z_k ($k = 1, \dots, N-1$) являются внешними к области Δ , то функция

$$Z^*(\zeta) = Z(\zeta) + hZ(\zeta) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{Z(\zeta) - A_k}{Z(\zeta) - Z_k}$$

при любом комплексном h , но достаточно малом по модулю, отображает круг $|\zeta| < 1$ на однолиственную область Δ^* , содержащую точку $Z^* = 0$ и не покрывающую точек $Z^* = A_k$ ($k = 1, \dots, N-1$) и $Z^* = \infty$. Следовательно, функция

$$f^*(\zeta) = \Phi(Z^*(\zeta)) = f(\zeta) + h\Phi'(Z(\zeta))Z(\zeta) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{Z(\zeta) - A_k}{Z(\zeta) - Z_k} + O(|h|^2) \in F_p^0(a_1, \dots, a_m). \quad (6)$$

Если точки Z_k ($k = 1, \dots, N-1$) являются внутренними точками области Δ , то $Z_k = Z(\zeta_k)$, $|\zeta_k| < 1$ ($k = 1, \dots, N-1$). Полагая

$$F(\zeta, \lambda) = Z(\zeta) + hZ(\zeta) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{Z(\zeta) - A_k}{Z(\zeta) - Z(\zeta_k)}, \quad h = \lambda e^{i\alpha},$$

и применяя теорему Г. М. Голузина, получим функцию $Z^*(\zeta)$, отображающую круг $|\zeta| < 1$ на однолиственную область Δ^* . Так как точки A_k ($k = 1, \dots, N-1$) и ∞ не лежат в Δ и преобразование (5) оставляет эти точки на месте, то при достаточно малом $|h|$ область Δ^* также не будет содержать этих точек и функция $\Phi(Z^*(\zeta)) \in F_p^0(a_1, \dots, a_m)$. Окончательно получаем:

$$f^*(\zeta) = \Phi(Z^*(\zeta)) = f(\zeta) + h\Phi'(Z(\zeta))Z(\zeta) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{Z(\zeta) - A_k}{Z(\zeta) - Z(\zeta_k)} - h\zeta f'(\zeta) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k}{\zeta - \zeta_k} + \bar{h}^2 f'(\zeta) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\bar{\alpha}_k}{1 - \bar{\zeta}_k - \zeta} + O(|h|^2), \quad (7)$$

где α_k — вычеты функции $e^{i\alpha} \frac{Z(\zeta)}{\zeta Z'(\zeta)} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{Z(\zeta) - A_k}{Z(\zeta) - Z(\zeta_k)}$ в простых полюсах ζ_k ($k = 1, \dots, N-1$).

4. Пусть $\gamma \geq 1$. Точкам $z = a_1, \dots, a_m, \infty$ при отображении (3) будут соответствовать точки $Z = A_k$ ($k = 1, \dots, N$; $N \leq p(m+1)$), расположенные в фундаментальной области S группы T_n . Соответствующая функция (4) отображает круг $|\zeta| < 1$ на конечную односвязную и однолиственную область Δ , содержащую точку $Z = 0$ и не содержащую точек $Z = A_k$ ($k = 1, \dots, N$). Область Δ , кроме того, не содержит точек, конгруэнтных по отношению к группе T_n , и, следовательно, содержит в некоторой односвязной фундаментальной области S_0 .

Рассмотрим функцию

$$Z^* = Z + h q_1(Z) \frac{\Phi(Z)}{\Phi'(Z)} \prod_{k=1}^{N_1} \frac{\Phi(Z) - a_k}{\Phi(Z) - b_k}, \quad (8)$$

где $z_k = a_k^1$ ($k = m+1, \dots, N_1$) — конечные точки разветвления поверхности R ; $z = b_k$ ($k = 1, \dots, N_1$) — какие-либо конечные точки, отличные от точек $z = a_k$ ($k = 1, \dots, N_1$); $q_1(Z)$ — однозначная автоморфная функция, принадлежащая той же группе T_n и не имеющая в S_0 никаких особенностей, кроме простых полюсов в точках области S_0 , в которых $\Phi'(Z) \neq 0$.*

Пусть Z_i при $i = 1, \dots, pN_1$ таковы, что $\Phi(Z_i) = b_k$ ($k = 1, \dots, N_1$), Z_i при $i = pN_1 + 1, \dots, pN_1 + r$ — полюсы $q_1(Z)$ и все точки Z_i ($i = 1, \dots, pN_1 + r$) — внутренние точки S_0 . Обозначим через $\bar{\Sigma}$ замкнутую ограниченную область, полученную из замкнутой области $\bar{S}_0$ удалением открытых непересекающихся окрестностей точек Z_i ($i = 1, \dots, pN_1 + n$), в которых $|\Phi(Z) - b_k| < \rho$ и $|q_1(Z)| < \rho$, где ρ фиксировано.

Нетрудно показать, что функция (8) регулярна и однолистка в области $\bar{\Sigma}$ при достаточно малом $|h|$. Пусть $f(\zeta) \in F_p^y(a_1, \dots, a_m)$ и точки Z_i ($i = 1, \dots, pN_1 + r$) лежат внутри Δ ; тогда $Z_i = Z(\zeta_i)$, $|\zeta_i| < 1$ ($i = 1, \dots, pN_1 + r$). Полагая

$$F(\zeta, \lambda) = Z(\zeta) + h q_1(Z(\zeta)) \frac{\Phi(Z(\zeta))}{\Phi'(Z(\zeta))} \prod_{k=1}^{N_1} \frac{\Phi(Z(\zeta)) - a_k}{\Phi(Z(\zeta)) - b_k} \quad (9)$$

и применяя теорему Г. М. Голузина, получим функцию $Z^*(\zeta)$, отображающую $|\zeta| < 1$ на однолиственную область Δ^* , не содержащую точек A_k ($k = 1, \dots, N$; $N \leq p(m+1)$). Кроме того, Δ^* не содержит точек, конгруэнтных по отношению к группе T_n .

Действительно, если граница Δ не содержит конгруэнтных точек, то при достаточно малом $|h|$ область Δ^* также не будет содержать таких точек. Пусть граница области Δ содержит конгруэнтные точки Z и Z' . Существует преобразование $T(Z) \in T_n$, переводящее точку Z в точку Z' .

По формуле (8) имеем:

$$Z^*(Z') = Z' + h T'(Z) q_1(Z) \frac{\Phi(Z)}{\Phi'(Z)} \prod_{k=1}^{N_1} \frac{\Phi(Z) - a_k}{\Phi(Z) - b_k}.$$

Отсюда заключаем, что искажение вариации в окрестности конгруэнтной точки определяется модулем и аргументом производной соответ-

* В частности, можно взять $q_1(Z) \equiv 1$.

ствующего преобразования, что доказывает утверждение. Как и выше, окончательно получаем:

$$f^*(\zeta) = \Phi(Z^*(\zeta)) = f(\zeta) + hf(\zeta)q_1(Z(\zeta)) \prod_{k=1}^{N_1} \frac{f(\zeta) - a_k}{f(\zeta) - b_k} - \\ - h\zeta f'(\zeta) \sum_{i=1}^{pN_1+r} \frac{\beta_i}{\zeta - \zeta_i} + \overline{h\zeta^2 f'(\zeta)} \sum_{i=1}^{pN_1+r} \frac{\overline{\beta_i}}{1 - \overline{\zeta_i} \zeta} + O(|h|^2) \in F_p^*(a_1, \dots, a_m), \quad (10)$$

где β_i — вычеты функции $e^{i\alpha} \frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)} q'(Z(\zeta)) \prod_{k=1}^{N_1} \frac{f(\zeta) - a_k}{f(\zeta) - b_k}$ в простых полюсах ζ ($i = 1, \dots, pN_1 + r$).

Формулы (6), (7) и (10) и являются искомыми вариационными формулами в классе $F_p^*(a_1, \dots, a_m)$.

Таким же путем можно получить вариационные формулы и для других классов многолистных функций.

Горьковский инженерно-строительный
институт
им. В. П. Чкалова

Поступило
30 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ M. Schiffer, Am. J. Math., 65, 341 (1943). ² Г. М. Голузин, Матем. сборн., 19 (61): 2, 203 (1946).