Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

ГЕОФИЗИКА

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

ПРОИСХОЖДЕНИЕ УСТОЙЧИВОЙ МЕРТВОЙ ЗЫБИ

После прекращения ветра, создавшего волны, энергия их начинает гаситься под действием внутреннего турбулентного трения в воде и отчасти под действием обтекания волн воздухом при их движении с определенной скоростью. В то же время обращает на себя внимание устойчивость мертвой зыби той или иной длины, долго сохраняющейся при штиле. Рассмотрим эти — послештормовые — явления с тех точек зрения, которые помогли нам найти внутренний механизм питания волн энергией ветра [1] и закономерности нарастания длины ветровых волн [2].

Прежде всего вспомним, что при высоте волн $h = 2r_0$ (где r_0 — радиус орбиты поверхностной частицы) и длине $\lambda = 2\pi R$ (где R — так называемый радиус круга качения) на единицу площади моря приходится момент количества движения

$$Q = {}^1/_2\,\delta\omega r_0^2 R = {}^1/_2\,\delta r_0^2 c. \tag{1}$$

Это — величина, осредненная за один период обращения частиц T. Через δ обозначена плотность воды, через c — фазовая скорость волн.

Такой кинетический момент сохранялся бы совершенно постоянным, если бы при штиле совсем отсутствовали внешние силы, воздействующие на волны. На самом деле такие силы есть. Это — силы, вызванные обтеканием волн, бегущих со скоростью c относительно неподвижного воздуха. Совершенно очевидно, что обтекание происходит теперь в направлении, прямо противоположном случаю, исследованному нами в [1]: там воздушный поток обгонял волны и создавал над опускающимися участками водной поверхности более высокое давление, чем над поднимающимися участками; в нашем новом случае над опускающимися участками (позади вершин волн) создается меньшее давление, чем над поднимающимися. В итоге возникают моменты сил, которые должны уменьшать кинетический момент Q, выражаемый формулой (1).

Допустим, что острые гребешки волн успели ликвидироваться: они исчезают очень быстро после прекращения ветра. Тогда окажется возможным применить нашу теоретическую формулу из [1], в данном случае для вычисления гасящего действия воздуха при обтекании волн. Отрицательная мощность, обусловленная этим явлением, в расчете на единицу поверхности, выразится так:

$$W_{\text{обт}} = -\bar{\chi}\,\frac{2r_0}{T}\,\delta_a c^2. \tag{2}$$

Здесь $\bar{\chi}$ — безразмерный коэффициент из [1]; δ_a — плотность воздуха.

Момент «гасящих» сил (приложенных к поверхности воды), осредненный за один период обращения поверхностных частиц, равен частному от деления $W_{\text{обт}}$ на угловую скорость вращения частиц на волне ω:

$$\overline{M}_{\text{обт}} = -\chi\,\frac{2r_0}{\omega T}\,\delta_a c^2 = -\frac{\bar{\chi}}{\pi}\,\delta_a r_0 c^2. \tag{3}$$

По теореме о кинетическом моменте момент $\overline{M}_{\text{обт}}$ должен равняться производной по времени от кинетического момента Q, определяемого по формуле (1). Следовательно, выполнив дифференцирование и сократив обе части полученного равенства на r_0, легко найти:

$$c\frac{dr_0}{dt}+\frac{1}{2}r_0\frac{dc}{dt}=-\frac{\overline{\chi}}{\pi}\frac{\delta_a}{\delta}c^2. \tag{4}$$

Отсюда непосредственно вытекает дифференциальное уравнение, которое связывает между собой изменения r_0 и изменения c, а стало быть, в скрытом виде, изменения R и длины волн λ:

$$\frac{dc}{dt}=-2\frac{c}{r_0}\frac{dr_0}{dt}-\frac{2}{\pi}\frac{\delta_a}{\delta}m. \tag{5}$$

Здесь через m сокращенно обозначено выражение

$$\frac{\overline{\chi}c^2}{r_0}=m. \tag{6}$$

Практически можно считать, что это — некоторый инвариант при изменениях c и r_0 в достаточно широких пределах. Действительно, по нашим измерениям ([2]), следует полагать, что $\overline{\chi}$ прямо пропорционально отношению r_0/λ. Иными словами, $\overline{\chi}$ должно быть пропорционально r_0/c^2. Значит, с достаточной для практики точностью можно принять в (6) и (5)

$$m=\text{const.}$$

Итак, момент силы вызванной обтеканием волн воздухом, влияет решающим образом на уменьшение кинетического момента во времени. Однако эта сила отступает на второй план в другой задаче: в задаче о гашении энергии волн, оставшихся после шторма. Здесь несравненно бо́льшую роль играют силы внутреннего турбулентного трения.

Обозначим через ν турбулентную кинематическую вязкость воды в море. Как известно, $\nu=\mu/\delta$, где μ — коэффициент турбулентного трения. Тогда можно будет показать, что уменьшение высоты волн, а следовательно, и уменьшение r_0 во времени выражается теоретической формулой:

$$\frac{dr_0}{dt}=-2\nu\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2r_0=\frac{2r_0}{R^2}\nu=\frac{2g^2}{c^4}r_0\nu. \tag{7}$$

Влияние аэродинамических сил, рассмотренных выше, тут дает не более 10% добавочных к основному эффекту, поэтому мы им пренебрегаем. Подставим выражение (7) в (5). Тогда окажется:

$$\frac{dc}{dt}=4g^2\frac{\nu}{c^3}-\frac{2}{\pi}\frac{\delta_a}{\delta}m. \tag{8}$$

Итак, при определенной величине ν изменение c во времени всецело зависит от самой величины c. Иными словами, изменение длины волн во времени всецело зависит от само́й длины волн. При некотором значении c правая часть (8) обращается в нуль, следовательно, в нуль обращается производная от c по времени.

Значит, мертвая зыбь, распространяющаяся с соответствующей скоростью $c_{\text{уст}}$, является устойчивой по длине: при ее распространении длина волн не меняется, невзирая на непрерывное гашение энергии и убыль момента количества движения.

На основании (8)

$$c_{\text{уст}} = \left(2\pi g^2 \frac{\delta}{\delta_a} \frac{\nu}{m}\right)^{1/3} \tag{9}$$

Отсюда определяется устойчивая длина мертвой зыби:

$$\lambda_{\text{уст}} = (2\pi)^{5/3} g^{1/3} \left(\frac{\delta}{\delta_a} \frac{\nu}{m}\right)^{2/3}. \tag{10}$$

Легко видеть, что при $\lambda < \lambda_{\text{уст}}$, $c < c_{\text{уст}}$ правая часть (8) положительна. Значит, соответствующая длина мертвой зыби должна нарастать до тех пор, пока она не достигнет устойчивого значения (10). Напротив, при $\lambda > \lambda_{\text{уст}}$, $c > c_{\text{уст}}$ правая часть (8) становится отрицательной. Значит, длина мертвой зыби здесь должна убывать, стремясь к тому же устойчивому значению (10).

Подставим в (10) числовые величины ν и m, найденные нами опытным путем при различных скоростях V ветра, создавшего волны перед штилем. Тогда получим следующие (разумеется, неточные) значения для открытого моря:

$V =$	8	10	13	17	м/сек
$\lambda_{\text{уст}} =$	27	96	96	120	м

Они весьма правдоподобны, несмотря на упрощенные допущения, лежавшие в основе вывода (10). С одной стороны, при этом выводе считалось, что ν постоянно при каждой заданной «предистории зыби»; в действительности ν должно уменьшаться с течением времени при штиле. С другой стороны, m тоже считалось постоянным; в действительности m должно уменьшаться с течением времени, так как волны не только становятся все глаже, но и все больше приближаются по форме к трохоиде, от которой они заметно отличались во время своего развития под действием ветра. Обе погрешности взаимно компенсируются, но только после многочисленных измерений в природных условиях можно будет судить о степени подобной компенсации.

Теперь остается еще определить: как изменяются во времени длины волн мертвой зыби, стремясь к устойчивому значению (10). Естественно искать этот закон в обобщенной форме, отвечающей каким угодно частным значениям ν и m. В связи с таким требованием придется вместо (8) записать дифференциальное уравнение для безразмерных величин. В искомое уравнение вместо скорости c войдет

$$x = \frac{c}{c_{\text{уст}}}. \tag{11}$$

Вместо времени t внесем в него безразмерную величину τ, которая связана со временем посредством соотношения

$$\frac{t}{\tau} = \frac{(4g^2\nu)^{1/3}}{\left(\frac{2}{\pi}\frac{\delta_a}{\delta} m\right)^{4/3}} \text{ сек.} \tag{12}$$

После простых преобразований вместо (8) получаем уравнение, в котором переменные тоже разделяются:

$$\frac{x^3\,dx}{1 - x^3} = d\tau. \tag{13}$$

Его интеграл запишется в форме:

$$\tau = -x + \frac{1}{6}\ln\frac{1 + x + x^2}{(1 - x)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} - \tau_0. \tag{14}$$

Величина τ отсчитывается от момента наступления штиля. Следовательно, постоянная интеграции τ_0 равна тому значению трехчленной функции в правой части (14), которое получается при подстановке в (14) значения $x = x_0$. В свою очередь, здесь x_0 отмечает, чему равнялось отношение скорости волн в момент прекращения ветра к скорости устойчивой мертвой зыби.

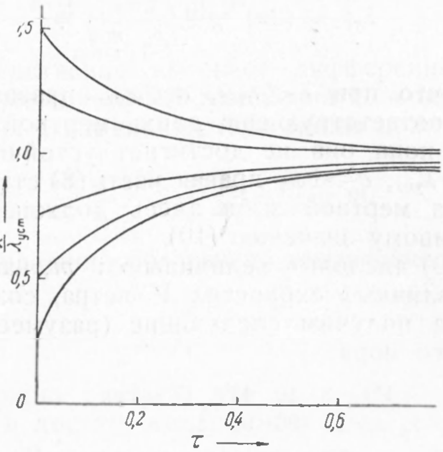

Рис. 1

Вычислив по (14) значения τ, соответствующие различным значениям x, при 5 разных начальных условиях, мы перешли от величин x к величинам более интересным: к значениям

$$x^2 = \frac{\lambda}{\lambda_{уст}}. \tag{15}$$

В результате были построены кривые изменения длин волн мертвой зыби, воспроизведенные на рис. 1. Здесь тоже взяты 5 различных начальных условий: в момент прекращения ветра, длины волн составляли, соответственно: 0,25; 0,50; 0,75; 1,25 и 1,50 от длины устойчивой мертвой зыби.

Подставив в (12) значения ν и m, найденные из опытов, легко определить масштаб времени. Вообще говоря, он таков, что протяженность диаграммы рис. 1 укладывается в рамках нескольких часов. Это хорошо вяжется с непосредственными наблюдениями в открытом море.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
13 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Шулейкин, ДАН, **94**, № 4 (1954). [2] В. В. Шулейкин, ДАН, **94**, № 6 (1954).