

Академик Л. Д. ЛАНДАУ, А. А. АБРИКОСОВ и И. М. ХАЛАТНИКОВ

### ОБ УСТРАНЕНИИ БЕСКОНЕЧНОСТЕЙ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Как известно, решение большинства задач в квантовой электродинамике приводит к бесконечностям. Хотя в настоящее время существуют способы вычитания этих бесконечностей (регуляризация), несомненно приводящие к правильным результатам, такой метод действий имеет искусственный характер. Бесконечности возникают в теории из точечного взаимодействия, описываемого  $\delta$ -функциями (операторы взаимодействующих полей берутся в одной точке). Целью настоящей работы является развитие идеи, что происхождение бесконечностей лежит не в точечности взаимодействия, а в том, что описание взаимодействия при помощи  $\delta$ -функций недопустимо.

Общий метод должен заключаться в том, что, рассматривая взаимодействие со сколь угодно малым, но конечным радиусом  $a$ , мы должны считать коэффициент при соответствующем выражении не постоянной, а величиной, зависящей от радиуса взаимодействия. В общем случае зависимость коэффициента от  $a$  должна определяться тем, что при уменьшении радиуса  $a$  все физические результаты должны стремиться к конечным пределам.

В случае электродинамики это означает, что мы должны считать стоящий в выражении взаимодействия между электроном и электромагнитным полем заряд  $e_1$  неизвестной заранее функцией радиуса взаимодействия.

При проведении программы нельзя пользоваться теорией возмущений, ибо, как это было впервые указано Эдвардсом<sup>(1)</sup>, одним из источников бесконечностей является решение уравнений последовательными приближениями. Если имеется уравнение  $f + \lambda I(f) = f_0$ , где  $I$  — некоторый интегральный оператор, а  $\lambda$  — малая величина, то уравнение может иметь конечное решение и в случае, когда  $I(f_0) = \infty$ . При этом  $\lambda I(f)$  не стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow 0$ , так что этот член участвует уже в определении нулевого приближения для  $f$ .

Мы поставим своей целью получить нулевые приближения для основных величин квантовой электродинамики. Поэтому нам достаточно рассматривать только такие диаграммы, в которых интегралы компенсируют стоящие перед ними малые коэффициенты (степени  $e_1^2$ ). Как известно, в электродинамике все расходящиеся интегралы имеют логарифмический характер\*.

\* Что касается расходящейся более сильно так называемой собственной массы фотона, то она должна равняться нулю в силу закона сохранения заряда. Это означает, что размазывание взаимодействия должно производиться таким образом, чтобы удовлетворять этому требованию.

Из предыдущего ясно, что такой логарифмически расходящийся интеграл имеет в действительности порядок  $1/e_1^2$ . Поскольку мы интересуемся нулевым приближением, нам достаточно рассматривать только такие диаграммы, в которых степень логарифма совпадает со степенью  $e_1^2$ .

Еще Дайсоном<sup>(2)</sup> были получены точные уравнения, связывающие функции Грина  $G$  и  $D_{\mu\nu}$ , соответствующие электронной и фотонной линиям, с вершинной частью  $\Gamma_\mu$ . Покажем, что в нулевом приближении можно написать замкнутые интегральные уравнения для величин  $\Gamma_\mu$ .

Для этого учтем, что добавление фотонной линии, охватывающей две вершины, не дает расходящегося интеграла. Поэтому в диаграммах, представляющих последовательные приближения вершинной части, мы можем не рассматривать линий, изображающих интерференцию вершин, которые приводят к логарифмам в степенях более низких, чем порядок теории возмущений. В частности, мы можем не рассматривать диаграмм с пересекающимися фотонными линиями. Кроме того, аналогичным образом исключаются более сложные диаграммы. Все

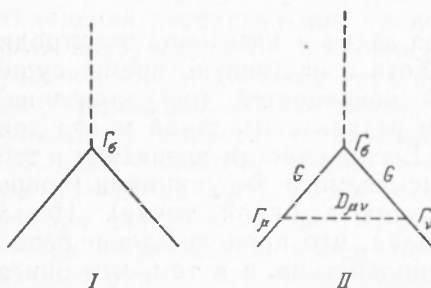


Рис. 1

оставшиеся в результате диаграммы представляют собой лестницу, в которой каждая вершина должна быть снабжена аналогичной дополнительной лестницей. При этом подразумевается, что фотонные и электронные линии просуммированы во всех приближениях, т. е. изображаются истинными функциями  $D_{\mu\nu}$  и  $G$ . Суммирование такой схемы в указанных предположениях может быть легко произведено. Именно, полная сумма всех высших приближений для диаграммы I (см. рис. 1) совпадает с диаграммой II (рис. 1), в которую включены все высшие приближения. Отсюда получаем следующее уравнение\*.

$$\Gamma_\sigma(p, p-l; l) = \gamma_\sigma + \frac{e_1^2}{\pi i} \int \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) \Gamma_\sigma(p-k, p-k-l; l) \times \\ \times G(p-k-l) \Gamma_\nu(p-k-l, p-l; -k) D_{\mu\nu}(k) d^4k. \quad (1)$$

К этому уравнению прибавляются уравнения для  $G$  и  $D_{\mu\nu}$ . Эти уравнения были выведены Дайсоном суммированием диаграмм, причем в данном случае без каких-либо пренебрежений. Для этого сравнивается (в случае  $G$ ) сумма высших приближений к диаграмме I (см. рис. 2) с полной суммой всех приближений диаграммы II (рис. 2). При этом в диаграмме II для того, чтобы не учитывать диаграмм высшего порядка многократно, следует прибавлять дополнительные фотонные линии только с одной стороны диаграммы. Это дает

$$G(p) = G^0(p) + \frac{e_1^2}{\pi i} G(p) \int \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_\nu D_{\mu\nu}(k) d^4k G_0(p). \quad (2)$$

Здесь  $G_0$  есть электронная линия в нулевом приближении теории возмущений

$$G_0 = \frac{1}{\hat{p} - m_1}, \quad (3)$$

где  $m_1$  обозначает «собственную массу» электрона, которую он имел

\* Мы пользуемся обозначениями Фейнмана<sup>(3)</sup>; в частности,  $\gamma_{1,2,3} = \beta\alpha_{1,2,3}$ ;  $\gamma_0 = \beta$ ;  $d^4k = (2\pi)^{-2} dk_0 dk_1 dk_2 dk_3$ .

бы «при отсутствии заряда». Это уравнение может быть написано в виде:

$$G(p) \left[ \hat{p} - m_1 - \frac{e_1^2}{\pi i} \int \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_\nu D_{\mu\nu}(k) d^4k \right] = 1. \quad (4)$$

Аналогичным образом получаем уравнение для  $D_{\mu\nu}$ :

$$D_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}^0(k) - \frac{e_1^2}{\pi i} D_{\mu\sigma}(k) \text{Sp} \left[ \int G(p) \Gamma_\sigma(p, p-k; k) \times \right. \\ \left. \times G(p-k) \gamma_\tau d^4p \right] D_{\tau\nu}^0(k). \quad (5)$$

Обычно  $D_{\mu\nu}^0$  полагается равным  $\delta_{\mu\nu}/k^2$ . Однако это не является ни наиболее общим, ни, как мы увидим далее, наиболее удобным определением. Ввиду градиентной инвариантности «продольные» (в четырехмерном смысле) фотоны не взаимодействуют с заряженными частицами, и поэтому продольная (пропорциональная  $k_\mu k_\nu$ ) часть тензора  $D_{\mu\nu}$  может быть выбрана произвольно. Более того, по тем же причинам она не может меняться под влиянием возмущений. С этим полностью согласуется то, что интегральный член в уравнении (5), соответствующий дираковскому току, всегда поперечен. Мы можем поэтому при любом выборе продольной части  $D_{\mu\nu}^0$  без изменения результата заменить в нем  $D_{\mu\nu}^0$  на  $\frac{1}{k^2} \delta_{\mu\nu}$ . Окончательно получается следующее уравнение для поперечной части  $D_{\mu\nu}^t$  ( $D_{\mu\nu}^t k_\mu = 0$ ) тензора  $D_{\mu\nu}$ .

$$D_{\mu\sigma}^t \left( k^2 \delta_{\sigma\nu} + \frac{e^2}{\pi i} \text{Sp} \left[ \int G(p) \Gamma_\sigma(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_\nu d^4p \right] \right) = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (6)$$

В последующих работах мы займемся решением уравнений (1), (4), (6), а сейчас укажем на некоторые важные свойства интегралов, входящих в эти уравнения. Неприятной их особенностью является интегрирование по четырехмерному псевдоевклидову пространству. Покажем, что, если мы будем ограничиваться пространственными векторами, то интегрирования могут быть перенесены в четырехмерное евклидово пространство. Существенным для этого является то, что все встречающиеся в уравнениях функции в конечном счете сводятся к скалярным функциям выражений типа  $(k-a)^2$ ,  $(k-b)^2$  и т. д., где  $a, b, \dots$  — постоянные вектора, а  $k$  — переменный вектор, по которому происходит интегрирование. Эти функции определены таким образом, что при изменении знака  $(k-a)^2$  необходимо аналитически продолжать их через верхнюю полуплоскость, в которой они не имеют особенностей. Поскольку мы исходим из «размазанного» взаимодействия, то  $\Gamma_\mu$ , а следовательно, подинтегральные выражения должны обращаться в нуль при  $k \rightarrow \infty$ .

Пусть постоянные при интегрировании вектора  $a, b$  и т. д. имеют равные нулю временные компоненты. Тогда интегрирование по временной компоненте  $k_0$  можно написать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k_0^2) dk_0 = \int_0^{\infty} F(x) \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

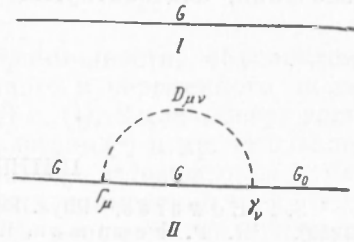


Рис. 2

(конечно,  $F$  зависит и от других компонент вектора  $k$ ). Поскольку  $F(x)$  не имеет особенности в верхней полуплоскости и обращается в нуль на бесконечности, мы имеем тождество:

$$\int_0^{\infty} F(x) \frac{dx}{Vx} = i \int_0^{\infty} F(-x) \frac{dx}{Vx}.$$

Это соответствует тому, что мы можем в указанном случае во всех четырехмерных интегралах заменить  $k_0$  на  $ik_0$ , после чего интегрирование сведется к интегрированию по четырехмерному евклидову пространству.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность А. Д. Галанину, И. Я. Померанчуку, Б. Л. Иоффе за дискуссию и ценные замечания, способствующие выяснению вопроса.

Поступило  
13 II 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> S. F. Edwards, Phys. Rev., **90**, 284 (1953). <sup>2</sup> F. Dyson, *ibid.*, **75**, 1736 (1949). <sup>3</sup> R. P. Feynman, *ibid.*, **76**, 749, 769 (1949).