Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

ФИЗИКА

М. А. ГИНЦБУРГ

ГИРОТРОПНЫЙ ВОЛНОВОД

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 1 II 1954)

1. В данной заметке рассматриваются электромагнитные волны в ограниченной гиротропной среде (электронная плазма ([1], [2]), ферриты ([3,4]), помещенные во внешнее магнитное поле $\mathbf{H}_0$, и т. д.). Выберем ось$O,Z\|\mathbf{H}_0$. Для волны $E(x, y)\exp(\gamma z - i\omega t)$ уравнения Максвелла примут тогда следующий вид ([1], [3], [4]):

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma E_y = -a[\mu_1 H_x - i\mu_2 H_y]; \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \gamma H_y = a[\varepsilon_1 E_x - i\varepsilon_2 E_y];$$
$$\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -a[i\mu_2 H_x + \mu_1 H_y]; \quad \gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = a[i\varepsilon_2 E_x + \varepsilon_1 E_y];$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -a\mu_3 H_z; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = a\varepsilon_3 E_z; \quad a = -i\frac{\omega}{c}; \tag{1}$$
$$\operatorname{div} D = \varepsilon_1\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) + \gamma\varepsilon_3 E_z + i\varepsilon_2\mu_3 a H_z = 0;$$
$$\operatorname{div} B = \mu_1\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) + \gamma\mu_3 H_z - i\mu_2 a\varepsilon_3 E_z = 0.$$

Дифференцируем первое из уравнений (1) по y, второе по x и вычитаем. В полученном уравнении выражаем величины $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}$; $\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}$; $\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}$; $\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}$ через E_z и H_z, используя остальные уравнения (1). В результате находим:

$$\Delta E_z + \varepsilon_3\left[\frac{\gamma^2}{\varepsilon_1} - a^2\frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1}\right]E_z + ai\gamma\mu_3\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)H_z = 0. \tag{2}$$

Аналогичным путем находим уравнение для H_z:

$$\Delta H_z + \mu_3\left[\frac{\gamma^2}{\mu_1} - a^2\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}\right]H_z - ai\gamma\varepsilon_3\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)E_z = 0. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует:

$$\Delta^2 E_z + a_1\Delta E_z + a_2 E_z = 0; \tag{4}$$
$$\Delta^2 H_z + a_1\Delta H_z + a_2 E_z = 0, \tag{5}$$

где $a_1 = \gamma^2\left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_3}{\mu_1}\right) - a^2\frac{\varepsilon_3}{\mu_1}(\mu_1^2 - \mu_2^2) - a^2\frac{\mu_3}{\varepsilon_1}(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$;
$a_2 = \frac{\varepsilon_3\mu_3}{\varepsilon_1\mu_1}[\gamma^4 - 2a^2\gamma^2(\varepsilon_1\mu_1 + \varepsilon_2\mu_2) + a^4(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)(\mu_1^2 - \mu_2^2)]$.

Общее представление решений уравнения типа (4) известно. Зная E_z и H_z, из (1) нетрудно определить остальные компоненты $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, так что (4) или (5) позволяет определить электромагнитное поле в гиротропной среде при заданных краевых условиях.

2. В качестве примера рассмотрим круглый волновод, заполненный гиротропной средой («гиротропный» волновод). Радиус волновода равен R, его ось $OZ \| \mathbf{H}_0$. Общее решение (4) при заданном $\gamma = \gamma_m$ может быть записано в виде ряда:

$$E_z = \sum_n [A_{nm} J_n(k_{c_1} r) + B_{nm} J_n(k_{c_2} r)] \exp(in\varphi),$$

где $k_{c_1}^2$ и $k_{c_2}^2$ — корни характеристического уравнения $k_c^4 - a_1 k_c^2 + a_2 = 0$.

Выражение вида

$$[J_n(k_{c_1} r) + B_{nm} J_n(k_{c_2} r)] \exp[in\varphi + \bar{\gamma}_{nm} z - i\omega t] \tag{6}$$

описывает некоторую вращающуюся неоднородную волну — нормальную волну гиротропного волновода. Постоянные γ_{nm} и B_{nm} определятся из краевых условий: при $r = R$ $E_\varphi = E_z = 0$. Из уравнений Максвелла выражаем E_φ через E_z и H_z и заменяем H_z его выражением из (2). Краевые условия при $r = R$ примут тогда следующий вид:

$$E_z = 0, \quad c_1 \frac{\partial \Delta E_z}{\partial r} + \frac{inc_2}{r} \Delta E_z + c_3 \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \tag{7}$$

где

$$c_1 = a^2 \varepsilon_1 (\mu_1^2 - \mu_2^2) - \gamma^2 \mu_1; \quad c_2 = i[\gamma^2 \mu_2 + a^2 \varepsilon_2 (\mu_1^2 - \mu_2^2)],$$

$$c_3 = \frac{-1}{\varepsilon_1 \mu_1} \{a^2 \gamma^2 \mu_3 (\varepsilon_1 \mu_2 + \mu_1 \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_3 [\gamma^2 \mu_1 - a^2 \varepsilon_1 (\mu_1^2 - \mu_2^2)]^2\}.$$

Подставляя (6) в (7), находим для γ трансцендентное уравнение:

$$k_{c_1} R [k_{c_1}^2 c_1 - c_3] J_n'(k_{c_1} R) + inc_2 k_{c_1}^2 J_n(k_{c_1} R) + \\ + B_n \{J_n'(k_{c_2} R) k_{c_2} R [k_{c_2}^2 c_1 - c_3] + J_n(k_{c_2} R) inc_2 k_{c_2}^2\} = 0^*, \tag{8}$$

где постоянная B_n определяется из условия $E_z = 0$ и равна $B_n = -J_n(k_{c_1} R) / J_n(k_{c_2} R)$. Аналогичным путем находим k_{c_1}, k_{c_2}, B_n и γ_n для волны $E = E(r) \exp(\bar{\bar{\gamma}} z - i\omega t - in\varphi)$. Поскольку при этом во втором члене равенства (8) коэффициент n заменится на $-n$, то изменятся и корни уравнения — собственные числа γ_{nm}, т. е. нормальные волны с разным направлением вращения распространяются при $n \neq 0$ с различными скоростями. Следовательно, круглый волновод, заполненный гиротропной средой (такой волновод мы называем «гиротропным»), поворачивает на некоторый угол ψ всю картину неоднородного волнового поля, что и наблюдалось на опыте ([2], [4]) (фарадеево вращение).

Поле в гиротропном волноводе существенно отличается от поля в изотропном случае. В нормальных волнах одновременно отличны от нуля обе продольные составляющие: E_z и H_z, отношение E_r / E_φ — комплексная величина, вектор $\mathbf{E}_s$ — поперечная составляющая $\mathbf{E}$ — описывает в плоскости поперечного сечения эллипс (на оси этот эллипс переходит в окружность, а на стенках — в прямую).

При $H_0 \to 0$ нормальные волны гиротропного волновода переходят в обычные E- и H-волны изотропного волновода. Их можно поэтому разделить на два типа. Волну, которая при $H_0 \to 0$ переходит в обычную E-волну, назовем волной типа E-гиротропная ($E_{\text{гир}}$). Волны второго типа при $H_0 \to 0$ переходят в обычные H-волны, назовем их волнами типа $H_{\text{гир}}$.

* Уравнение, аналогичное (8), но без его вывода и для несколько более частного случая, приводится также в сообщении ([5]), опубликованном уже после того, как данная работа была закончена.

Соотношения (2) — (8) позволяют рассчитать также цилиндрический резонатор, заполненный гиротропной средой. Решение ищем в виде суммы прямой и отраженной волн: $\exp[\gamma z + in\varphi - i\omega t]$ и $\exp[-\gamma z + in\varphi - i\omega t]$. Краевое условие на верхнем и нижнем основаниях при $z = 0$, d определяет γ: $\gamma = i\frac{p\pi}{d}$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Подставляя это значение γ в (8), получаем уравнение, определяющее частоты собственных колебаний резонатора. Для волн с различным направлением вращения это уравнение имеет разный вид и, следовательно, различные корни — частоты собственных колебаний с правым и с левым вращением.

3. Рассмотрим гиротропный волновод при $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$, $\mu_2 \ll \mu_1$, т. е. для слабо гиротропных сред. Будем учитывать лишь первые степени $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ и μ_2/μ_1; такое приближение назовем слабо гиротропным приближением. Из конкретных выражений для ε_{ik} и μ_{ik} ([1], [3], [4]) следует, что в этом приближении $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, $\mu_1 = \mu_3$. Для волны $H_{\text{гир}}$ в слабо гиротропном приближении уравнение (3) переходит в $\Delta H_z + k^2 H_z = 0$, где $k^2 = \gamma^2 - a^2\varepsilon_3\mu_3$, а краевое условие (7) принимает вид:

$$n(\gamma^2\mu_2 + a^2\varepsilon_2\mu_3^2)H_z + \mu_3 R(\gamma^2 - a^2\varepsilon_3\mu_3)H_z' = 0. \tag{9}$$

Пусть в волноводе с изотропной средой $\varepsilon = \varepsilon_3$, $\mu = \mu_3$ γ и k_c равны γ_0 и k_0. Будем считать, что приращение $\Delta\gamma = \gamma - \gamma_0$, обусловленное гиротропностью среды, мало. Разлагая (9) в ряд по $\Delta\gamma$, найдем величину фарадеева вращения $\psi = i\frac{\overline{\gamma} - \overline{\overline{\gamma}}}{2n}$:

$$\psi = i\frac{\gamma_0^2\mu_2 + a^2\varepsilon_2\mu_3^2}{\gamma_0\mu_3[(k_0R)^2 - n^2]}. \tag{10}$$

Помимо слабо гиротропного приближения возможен еще один приближенный метод. Уравнение (4) (или (5)) есть уравнение Эйлера функционала:

$$F = \iint\left\{(\Delta E_z)^2 + a_1\left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)^2\right] + a_2E_z^2\right\}dx\,dy.$$

Если точное решение (4), (5) затруднительно, то пользуемся приближенными методами вариационного исчисления (метод Галеркина, метод Ритца и др.).

4. Пусть волновод заполнен при $r < \rho < R$ гиротропной средой, а при $R > r > \rho$ — изотропной средой 1 ($\varepsilon = \mu = 1$). В области $r < \rho$ поле определяется из (7), при $r > \rho$ $E_z = A_1J_n(k_cr) + A_2N_n(k_cr)$; $H_z = A_3J_n(k_cr) + A_4N_n(k_cr)$. Условия непрерывности тангенциальных составляющих при $r = \rho$ дают вместе с граничными условиями на стенках волновода 6 линейных однородных уравнений для 6 амплитуд $A_1, \ldots, A_6$. Приравнивая нулю детерминант этой системы, получаем трансцендентное уравнение, определяющее γ. Для волн $\exp(\overline{\gamma}z + in\varphi - i\omega t)$ и $\exp(\overline{\overline{\gamma}}z - in\varphi - i\omega t)$ это уравнение имеет разный вид: изменение знака n приводит к изменению коэффициентов уравнения, а стало быть, и его корней: $\overline{\gamma}_{nm} \neq \overline{\overline{\gamma}}_{nm}$. Таким образом, в двухслойном гиротропном волноводе должно наблюдаться фарадеево вращение.

Пусть $\rho \ll R$ и γ мало отличается от постоянной распространения в изотропном волноводе γ_0: $\Delta\gamma = \gamma - \gamma_0 \ll \gamma_0$. Разлагая все члены в трансцендентном уравнении для γ в ряд по $\Delta\gamma$ и по ρ, находим:

для волны $H_{\text{гир}}$: $$\Delta\gamma = \frac{AP}{\gamma_0}; \quad P = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 + 1} - \gamma^2\frac{\mu_1 \pm \mu_2 - 1}{\mu_1 \pm \mu_2 + 1}; \tag{11}$$

для волны $E_{\text{гир}}$: $$\Delta\gamma = \frac{BQ}{\gamma_0}; \quad Q = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_1 \pm \mu_2 - 1}{\mu_1 \pm \mu_2 + 1} - \gamma^2\frac{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 + 1}; \tag{12}$$

$$A = \frac{2n}{(n!)^2 J_n^2(k_0R)[n^2-(k_0R)^2]}\left(\frac{k_0\rho}{2}\right)^{2n}; \quad B = \frac{-2n}{(n!)^2(k_0R)^2 J_{n-1}^2(k_0R)}\left(\frac{k_0\rho}{2}\right)^{2n},$$

где k_0 соответствует полому волноводу без стержня 2.

Для волны $\exp(\gamma z + in\varphi)$ ε_2 и μ_2 в (11), (12) следует брать со знаком плюс, для волны $\exp(\gamma z - in\varphi)$ — со знаком минус. Для вырожденных волн ($n=0$):

$$\Delta\gamma = \frac{M}{\gamma_0}, \quad M = \frac{\mu_3 - 1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\frac{-k_0^2}{J_0^2(k_0R)} \quad \text{(волна } H_0\text{)}; \tag{13}$$

$$\Delta\gamma = \frac{N}{\gamma_0}, \quad N = \frac{\varepsilon_3 - 1}{2}\frac{\rho^2}{R^2}\frac{k_0^2}{J_1^2(k_0R)} \quad \text{(волна } E_0\text{)}. \tag{14}$$

Считая γ фиксированным, находим аналогично (11)—(13) изменение $\Delta\omega$ резонансной частоты резонатора, обусловленное гиротропным образцом 2 (вследствие потерь $\Delta\omega$, вообще говоря, комплексно):

$$\begin{aligned} &\Delta\omega = \frac{AP}{\omega/c^2} \quad \text{(волна } H_{\text{гир}}\text{)}; \qquad \Delta\omega = \frac{BQ}{\omega/c^2} \quad \text{(волна } E_{\text{гир}}\text{)}; \\ &\Delta\omega = \frac{M}{\omega/c^2} \quad \text{(волна } H_0\text{)}; \qquad \Delta\omega = \frac{N}{\omega/c^2} \quad \text{(волна } E_0\text{)}, \end{aligned} \tag{15}$$

где P, Q, M и N имеют те же значения, что и в (11)—(14).

Соотношения (15) указывают способ измерения всех 6 компонент тензоров ε_{ik} и μ_{ik} гиротропных сред. Для этой цели в резонаторе поочередно возбуждаются волны $E_{\text{гир}}$ и $H_{\text{гир}}$ с левым и правым вращением, а также вырожденные волны E_0 и H_0 и измеряются вызванные гиротропным образцом 2 смещение резонансной частоты и изменение добротности. По этим данным вычисляем из (15) действительную и мнимую части всех 6 компонент тензоров диэлектрической постоянной ε_{ik} и магнитной проницаемости μ_{ik}.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить акад. С. Л. Соболева за внимание и за ценные советы.

Поступило
9 VIII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, 1949. [2] L. Goldstein, M. Lampert, J. Heney, Phys. Rev., **82**, 956 (1951); см. также Усп. физич. наук, **45**, 472 (1951). [3] D. Polder, Phil. Mag., **40**, 99 (1949). [4] C. L. Hogan, Bell. Syst. Techn. J., **31**, 1 (1952). [5] H. Suhl, L. Walker, Phys. Rev., **86**, 122 (1952).