Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

ГИДРАВЛИКА

Н. В. ТЯБИН

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 8 I 1954)

Задача о неустановившемся течении вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе была впервые решена русским ученым, профессором Казанского университета И. С. Громека еще в 1882 г. [1], хотя до последнего времени это решение приписывалось Шиманскому [2], который выполнил его на 50 лет позднее Громека.

Большой интерес представляет теоретическое исследование неустановившегося течения вязко-пластической среды в круглой трубе. Г. В. Виноградовым и А. А. Константиновым предложен капиллярный вискозиметр, позволяющий в результате одного замера получить кривую течения во всем диапазоне градиентов скоростей [3] В этом приборе в капилляре осуществляется неустановившийся режим течения вследствие непрерывно изменяющегося давления пружины, которая при помощи штока вытесняет испытуемое вещество.

Рассмотрим неустановившееся течение вязко-пластической среды в трубе. Решение проведем на основании общих уравнений течения вязко-пластической среды, установленных автором [3]:

$$\rho(F-w)-\nabla p+\eta_{\text{пл}}\nabla^2 v+\nabla\theta=0,\ \nabla v=0.$$

Допустим, что среда в момент $t=0$ начинает двигаться в трубе радиуса R в направлении оси Oz, совпадающей с осью трубы. В этом случае компоненты скоростей в цилиндрической системе координат запишутся: $v_r=v_\varphi=0$, $v_z=v(r,t)$, т. е. частицы среды движутся параллельно стенкам трубы. Компоненты тензора предельных напряжений, за исключением $\theta_{rz}=\theta=\text{const}$, равны нулю; массовыми силами пренебрегаем; $F=0$; $\frac{\partial p}{\partial\varphi}=\frac{\partial p}{\partial r}=0$. Тогда уравнение течения запишется:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\eta_{\text{пл}}}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\theta}{\rho r}. \tag{1}$$

Очевидно, что перепад давления $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$ не зависит от координат, а является функцией времени:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\omega(t), \tag{2}$$

$$-\frac{p}{\rho}=z\omega(t)+\chi(t). \tag{3}$$

Заменяя согласно идеям Н. А. Слезкина и С. М. Тарга [4] в уравнении (1) $\partial v/\partial t$ средним ускорением по поперечному сечению трубы

$$F(t)=\frac{1}{R}\int_0^R\frac{\partial v}{\partial t}\,dr, \tag{4}$$

получим:

$$F(t)=\frac{\rho}{\eta_{\text{пл}}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\omega(t)+\frac{\theta}{\rho r}.$$

Обозначая $\varphi(t)=F(t)-\omega(t)$ и интегрируя, будем иметь:

$$v=\frac{\rho}{\eta_{\text{пл}}}\varphi(t)\frac{r^2}{4}-\frac{\theta}{\eta_{\text{пл}}}r+C_1\ln r+C_2.$$

Считая, что скорость среды на оси трубы конечна, получим: $C_1=0$. Постоянную C_2 определим из граничных условий: при $r=R$ $(t>0)$ $v=0$ (среда прилипает к стенке). Тогда:

$$v=\frac{\rho}{\eta_{\text{пл}}}\varphi(t)\frac{r^2-R^2}{4}-\frac{\theta}{\eta_{\text{пл}}}(R-r). \tag{5}$$

Для определения $\varphi(t)$ найдем $F(t)$ из (4). Определяя $\partial v/\partial t$ из (5) и интегрируя (4), получим:

$$F(t)=-\frac{\rho}{\eta_{\text{пл}}}\frac{R^2}{6}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\rho}{\eta_{\text{пл}}}\frac{R^2}{6}\left(\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial\omega}{\partial t}\right). \tag{6}$$

В вискозиметре конструкции Виноградова и Константинова давление с течением времени изменяется по экспоненциальному закону. Поэтому будем считать

$$p=p_0e^{-\alpha t}, \tag{7}$$

где p_0 — начальное давление при $t=0$; α определяется из опытного графика $p=p(t)$. Считая, что при $z=0$ $p=p_0e^{-\alpha t}$, при $z=L$ $p=p_{\text{ат}}$, где L — длина трубы, $p_{\text{ат}}$ можно считать равным нулю, получим:

$$\frac{p_0e^{-\alpha t}}{\rho L}=\omega(t),\qquad \frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\alpha p_0}{\rho L}e^{-\alpha t}. \tag{8}$$

Уравнение (6), учитывая (8), запишется:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{t_1}F+\frac{\alpha t_1 p_0}{\rho L}e^{-\alpha t}=0,$$

где $t_1=\rho R^2/6\eta_{\text{пл}}$.

Интегрируя, найдем:

$$F(t)=C_3e^{-t/t_1}-\frac{\alpha p_0}{\rho L}\frac{t_1}{1/t_1-\alpha}e^{-\alpha t};$$

тогда $\varphi(t)=C_3e^{-t/t_1}-\frac{p_0a}{\rho L}e^{-\alpha t}$, где $a=\frac{1-2\alpha t}{1-\alpha t_1}$. Подставляя найденное значение $\varphi(t)$ в выражение (5), будем иметь:

$$v=\frac{\rho}{\eta_{\text{пл}}}\frac{r^2-R^2}{4}\left(C_3e^{-t/t_1}-\frac{p_0a}{\rho L}e^{-\alpha t}\right)-\frac{\theta}{\eta_{\text{пл}}}(R-r). \tag{9}$$

Определим постоянную C_3. Из начальных условий будем иметь: при $t=0$ $v=0$. Тогда C_3 определится: $C_3=\frac{p_0a}{\rho L}+\frac{4\theta(R-r)}{\rho(r^2-R^2)}$. Подставляя C_3 в уравнение (9), получаем закон распределения скоростей:

$$v=\frac{p_0a(R^2-r^2)}{4L\eta_{\text{пл}}}\left(e^{-\alpha t}-e^{-t/t_1}\right)-\frac{\theta}{\eta_{\text{пл}}}(R-r)\left(1-e^{-t/t_1}\right). \tag{10}$$

Этот закон будет справедлив в зоне $R\leqslant r\leqslant r_0$, где r_0 — радиус квазитвердого сплошного стопора:

$$r_0=\frac{2L\theta}{p}=\frac{2L\theta}{p_0}e^{\alpha t}.$$

Расход среды определится: $q = \pi r_0^2 v_0 + \int\limits_{r_0}^{R} 2\pi r v\, dr$, где при $r = r_0$ $v = v_0$.

Определив значение v_0 из уравнения (10) и проинтегрировав, получим значение секундного расхода среды, вытекающей из трубы:

$$q = \frac{\pi p_0 a (R^4 - r_0^4)}{8L\eta_{\text{пл}}} (e^{-\alpha t} - e^{-t/t_1}) - \frac{\pi}{3} \frac{\theta (R^3 - r_0^3)}{\eta_{\text{пл}}} (1 - e^{-t/t_1}). \tag{11}$$

Значительный интерес представляет неустановившееся течение вязко-пластической среды при постоянном давлении.

Полагая, что $p = \text{const}$, будем иметь $\alpha = 0$; тогда скорость из (10) определится:

$$v = \left[\frac{p (R^2 - r^2)}{4L\eta_{\text{пл}}} - \frac{\theta}{\eta_{\text{пл}}}(R - r)\right]\left(1 - e^{-6\eta_{\text{пл}} t/\rho R^2}\right),$$

а секундный расход среды, текущей через трубу, будет:

$$q = \left[\frac{\pi p}{8L\eta_{\text{пл}}}(R^4 - r_0^4) - \frac{\pi}{3}\frac{\theta}{\eta_{\text{пл}}}(R^3 - r_0^3)\right]\left(1 - e^{-6\eta_{\text{пл}} t/\rho R^2}\right), \tag{12}$$

где $r_0 = 2L\theta/p$, L — длина трубы.

Теоретически полученный закон изменения секундного расхода вязко-пластической среды в зависимости от времени (11) экспериментально подтверждается кривыми зависимости $q = f(t)$, полученными Виноградовым и Константиновым по исследованию неустановившегося течения консистентных смазок в капиллярах при переменном давлении, которое изменялось по экспоненциальному закону. Уравнения (11) и (12) будут справедливы и для всех других дисперсных систем, обладающих вязко-пластическими свойствами, при неустановившемся режиме течения дисперсных систем в цилиндрических трубах.

Казанский химико-технологический институт им. С. М. Кирова

Поступило 7 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Громека, Собр. соч., Изд. АН СССР, 1952, стр. 147. [2] Аэродинамика, пер. с англ., 3, Оборонгиз, 1939, стр. 77. [3] Н. В. Тябин, Колл. журн., 13, 1 (1951). [4] Н. А. Слезкин, С. М. Тарг, ДАН, 54, № 3 (1946).