Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. Я. ХАЖАЛИЯ

ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ, МАЛО ОТКЛОНЯЮЩЕЙСЯ ОТ ЦИЛИНДРА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 19 I 1954)

В настоящей статье дается обобщение одной формулы М. А. Лаврентьева ([1]) для определения растяжения при конформном отображении узкой полосы на прямолинейную полосу на случай определения скорости течения жидкости в трубе, мало отклоняющейся от цилиндра.

Постановка задачи. Рассматривается движение жидкости с осевой симметрией. Пусть ось x есть ось симметрии, а плоскость xOy есть осевое сечение потока.

Мы будем определять скорость потока на его границе $\Gamma: y = y(x)$ при следующих гипотезах: 1) при конечной средней скорости потока предполагаем величины $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ и $y'''(x)$ малыми равномерно относительно x; 2) скорость потока V в граничной точке определяем, сохраняя лишь члены второго порядка малости относительно $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$.

Введем следующие обозначения: $u(x, y)$ — потенциал искомого течения; $v(x, y)$ — функция тока; h — расход жидкости.

Основные уравнения. Потенциал $u(x, y)$ и функция тока $v(x, y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -y\frac{\partial u}{\partial y}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = y\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2}$$

Так же как в плоском случае, в силу принятых гипотез искомая скорость V в точке границы Γ будет полностью определяться величинами h, $y(x)$, $y'(x)$ и $y''(x)$. Отсюда для решения поставленной задачи нам достаточно определить V в точке $x = 0$ для какого-либо течения и представить полученное выражение для V в форме

$$V = \frac{h}{\pi y^2}(1 + Ay^2 + Byy'' + Cy''^2 + Dy'^2); \tag{3}$$

членов, содержащих y' в первой степени, не будет, ибо V, очевидно, четная относительно $y'(x)$. Коэффициенты A, B, C и D можно получить из рассмотрения простейших частных движений.

Случай одного источника. Определим V для потока, создаваемого источником, помещенным в точке $-a$, $a > 0$, оси симметрии. Полагая $y'(0) = \operatorname{tg}\theta$, очевидно, получим $V = R\cos^2\theta / a^2$, где R — интенсивность источника. Заменяя a через y и θ, будем иметь:

$$V = \frac{R\sin^2\theta}{y^2}. \tag{4}$$

С другой стороны, расход h потока внутри конуса с образующей Г будет $h = 2\pi R(1-\cos\theta)$; отсюда $R = h / 2\pi(1-\cos\theta)$; подставляя в (4), получим:

$$V = \frac{h}{\pi y^2}\frac{\sin^2\theta}{2(1-\cos\theta)} = \frac{h}{\pi y^2}\left(1 - \frac{1}{4}y'^2\right).$$

Таким образом, в формуле (3) имеем $A = 0$, $D = {}^1/_4$.

Случай источника и стока. Для определения B и C рассмотрим течение, определяемое источником в точке $-a$ и стоком в точке a. Такое течение будет иметь потенциал

$$u(x, y) = -\frac{R}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} + \frac{R}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}.$$

Зная потенциал, из (2) нетрудно найти функцию тока $v(x, y)$. Очевидно, достаточно определить $v(x, y)$ отдельно для источника и отдельно для стока; пусть $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$ — соответствующие функции. Функция $v(x, y)$ должна быть постоянной на лучах, выходящих из точки $-a$, следовательно,

$$v_1(x, y) = f\left(\frac{y}{x+a}\right).$$

Но тогда по (2) имеем:

$$\frac{1}{x+a}f'\left(\frac{y}{x+a}\right) = y\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{R(x+a)y}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}.$$

Полагая $\frac{y}{x+a} = t$, получим

$$f'(t) = \frac{Rt}{(1+t^2)^{3/2}}; \quad f(t) = \frac{-R}{(1+t^2)^{1/2}}.$$

Таким образом,

$$v_1(x, y) = -\frac{R(x+a)}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}.$$

Вполне аналогично

$$v_2(x, y) = -\frac{R(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}},$$

и, окончательно:

$$v(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y) = -R\left\{\frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}} + \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}\right\}. \qquad (5)$$

Искомая скорость потока V в точке $x = 0$ будет

$$V = \frac{\partial u}{\partial x} = R\left\{\frac{x+a}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{a-x}{[(a-x)^2+y^2]^{3/2}}\right\}_{x=0} = \frac{2R}{a^2}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^2\right]. \qquad (6)$$

Наша задача сводится к тому, чтобы параметры R и a выразить через параметр h и $y''(x)$. Начнем с вывода соотношения между h и R.

Элемент расхода dh жидкости, протекающей через кольцо радиуса y и шириной dy, будет

$$dh = 2\pi y V_x\, dy = 2\pi\frac{\partial v}{\partial y}dy,$$

откуда, согласно (5),

$$h = 2\pi[v(0, y)]_0^y = \pi R\left[2\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^4\right];$$

$$R = \frac{h}{2\pi y^2}a^2\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{y}{a}\right)^2\right]. \qquad (7)$$

Перейдем к определению связи между a и y''. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = y\,\frac{\frac{1}{[(a+x)^2+y^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(a-x)^2+y^2]^{3/2}}}{\frac{a+x}{[(a+x)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{a-x}{[(a-x)^2+y^2]^{3/2}}};$$

$$y''_0 = \left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]\right\}_{x=0} = -\frac{3y}{a^2}\left[1-\left(\frac{y}{a}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Из (6) и (7), исключая R, будем иметь:

$$V = \frac{h}{\pi y^2}\left[1 - \frac{3}{4}\left(\frac{y}{a}\right)^2\right].$$

Отсюда, в силу (8), окончательно

$$V = \frac{h}{\pi y^2}\left[1 + \frac{1}{4}yy''\right].$$

Таким образом, в формуле (3) надо положить $B = 1/4$ и $C = 0$, и она примет вид

$$V = \frac{h}{\pi y^2}\left[1 + \frac{1}{4}yy'' - \frac{1}{4}y'^2\right]. \tag{9}$$

Оценка точности здесь та же, что и в плоском случае.

Приложение. В качестве приложения формулы (9) рассмотрим следующую механическую задачу. В эластичной цилиндрической трубе движется жидкость с данным расходом h; зная упругие свойства трубы и давление в жидкости при нулевой скорости, требуется определить все возможные установившиеся движения. Речь идет о возможности существования, наряду с поступательным движением, установившихся волновых движений. Наше решение будет законно, если длина волны будет велика сравнительно с диаметром потока.

Введем дополнительные обозначения: P_0 — давление в жидкости при $V = 0$; P — давление на границе потока; ρ — плотность жидкости.

Кроме того примем несколько упрощающих гипотез относительно упругих свойств трубы. Мы примем, что давление на жидкость трубой выражается законом

$$P = M(y - y_0), \tag{10}$$

где y_0 — начальный радиус трубы, M — постоянная. Давлением атмосферы пренебрегаем.

Согласно формуле Бернулли давление P в жидкости равно

$$P = P_0 - \frac{\rho}{2}V^2.$$

На границе это давление должно равняться, согласно (10), $M(y - y_0)$. Заменив V его выражением через $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, получим основное дифференциальное уравнение, определяющее искомое течение:

$$P_0 - \frac{\rho}{2}\left(\frac{h}{\pi y^2}\right)^2\left[1 + \frac{1}{2}yy'' - \frac{1}{2}y'^2\right] = M(y - y_0). \tag{11}$$

Найдем прежде всего радиус трубы, при котором возможно поступательное движение. Получим:

$$2\pi^2 M(y - y_0)y^4 - 2P_0\pi^2 y^4 - \rho h^2 = 0. \tag{12}$$

Вблизи каждого из корней y_1, $y_1 > y_0$, уравнения (12) можно искать волновое движение со «средним» радиусом y_1.

Уравнение (11) есть аналог уравнения Релея нелинейной теории длинных волн в тяжелой жидкости. Подробное исследование уравнения (11) связано с большими выкладками, и мы ограничимся здесь рассмотрением одного частного случая.

Допустим, что $y - y_1$, y'' и y' малы сравнительно с y_1, тогда уравнение (11) можно линеаризировать и в переменной z оно примет вид

$$z'' + az = 0.$$

В этом случае возможность волновых движений будет определяться знаком a. Если $a < 0$, то волновых движений нет, если $a > 0$, то волновые движения определяются уравнением

$$y = y_1 + M \sin \sqrt{a}(x - x_0).$$

Поступило
29 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Лаврентьев, Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики, 1946, стр. 109.