Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

МАТЕМАТИКА

С. А. СТЕБАКОВ

АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 I 1954)

Рассмотрим динамические системы вида

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, x_{i-1});$$

$$f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} \text{ непрерывны}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad x_0 \equiv x_n. \tag{1}$$

Допустим, что функции f_i заданы с точностью до некоторого класса* вариаций, тогда может возникнуть следующая задача:

Требуется подобрать f_i так, чтобы распределение траекторий

$$x_i(t) = \eta[t, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)], \quad i = 1, \ldots, n,$$

в фазовом пространстве $F^{(n)} = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$ удовлетворяло заданным условиям. Уточняя эти условия, получаем различные частные задачи для систем (1).

Задача подбора статически устойчивых систем (1) (задача статической стабилизации систем (1)). Подобрать систему (1), имеющую заданную окрестность $U(O)$ точки покоя O, входящую в область притяжения** к O.

Примечание. Практически целесообразно решать задачу с дополнительным условием $\partial f_i / \partial x_{i-1} \not\equiv 0$.

Определение. Скажем, что замкнутая поверхность обладает односторонней проводимостью внутрь, если через всякую ее точку проходит траектория, продолжение которой, начиная с достаточно больших значений t, лежит внутри этой поверхности. Назовем такую поверхность «*Л*-оболочка» (или «оболочка Ляпунова»).

Пользуясь прямым методом Ляпунова, легко показать, что, если через каждую точку окрестности $U(O)$ проходит некоторая *Л*-оболочка, внутри которой лежит O, то всякая фаза из $U(O)$ стремится к O.

Рассмотрим параллелепипед, образованный точками

$$(x_1, \ldots, x_n); \quad \alpha_{i2} < x_i < \alpha_{i1}; \quad \alpha_{i2} < 0; \quad \alpha_{i1} > 0; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Обозначим буквой g границу этого параллелепипеда и символом s_{i1} (соответственно s_{i2}) ту его грань, которая пересекает полуось $x_i > 0$ (соответственно $x_i < 0$).

Лемма 1. *Если система* (1) *удовлетворяет условию* $\operatorname{sign} f_i = \operatorname{sign}(-1)^k$, *когда* $(x_1, \ldots, x_n) \in s_{ik}$, *то* g *является Л-оболочкой в* F *системы* (1).

* Этот класс обусловливается конструктивными возможностями технической реализации систем (1).

** Мы будем говорить, что $U(O)$ входит в область притяжения к O, если всякая фаза (т. е. движущаяся в $F^{(n)}$ точка $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, имеющая начальное положение $(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \in U(O)$, стремится к O при $t \to \infty$.

Доказательство. Каждая фаза, лежащая на g, смещается внутрь g, так как, если для нее $x_i > 0$ ($x_i < 0$), то она лежит на s_{i1} (s_{i2}), и, следовательно, согласно условию леммы, для нее $\dot{x}_i < 0$ ($\dot{x}_i > 0$) ч. т. д.

Условимся называть «ящиком» границу всякого n-мерного параллелепипеда, рассматриваемую как точечное множество. Вкладывая один ящик внутрь другого, можно заполнить некоторую ограниченную двумя такими ящиками область G. Если каждый ящик заполнения будет Л-оболочкой системы (1), то всякая фаза, лежащая при $t = 0$ в области G, перемещается при возрастании t внутрь ящика, являющегося внутренней границей области G (если эта внутренняя граница не стянулась в точку O*).

Итак, нам надо распространить условие, сформулированное в лемме для одного ящика, на случай, когда ящики образуют некоторое семейство.

Преобразуя координаты, придем к случаю, когда каждая грань любого ящика станет перпендикулярна некоторой оси и, следовательно, может быть обозначена символом s_{ik}. Суммируя множества s_{ik} всех ящиков при фиксированных i и k и беря открытое ядро суммарного множества, получаем область S_{ik}.

Лемма 2. *Если* $\operatorname{sign} f_i = \operatorname{sign}(-1)^k$, *когда* $(x_1, \ldots, x_n) \in S_{ik}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2$, *то каждый ящик заполнения будет Л-оболочкой.*

Доказательство. Каждый ящик заполнения удовлетворяет условиюлем мы 1, ч. т. д,

Остается указать такой способ заполнения данной области ящиками, который облегчает проверку условия леммы 2.

Символом $P_{i,i-1}$ обозначим координатную плоскость $x_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, i-2, i+1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, n$, причем полагаем $P_{1,0} \equiv P_{1,n}$.

На каждой плоскости $P_{i,i-1}$ ($i \neq 2$) проведем кривую L_i, являющуюся графиком непрерывной монотонной функции $L_i(x_i)$, причем $L_i(0) = 0$. Кроме того на $P_{1,n}$ проведем кривую φ, являющуюся графиком непрерывной монотонной функции $\varphi(x_1)$, $x_1 > 0$, причем $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x_1) L'(x_1) < 0$. Теперь всякой точке $(\alpha_{11}, 0, \ldots, 0)$ на полуоси $x_1 > 0$ можно сопоставить точку $(\alpha_{12}, 0, \ldots, 0)$ на полуоси $x_1 < 0$ такую, что $L_1(\alpha_{12}) = \varphi(\alpha_{11})$. Каждая пара чисел $(\alpha_{11}, \alpha_{12})$ определяет на P_{1n} прямоугольник $\gamma(\alpha_{11})$ с вершинами

$$(\alpha_{11}, L_1(\alpha_{11})), \quad (\alpha_{11}, \varphi(\alpha_{11})), \quad (\alpha_{12}, L_1(\alpha_{11})), \quad (\alpha_{12}, L_1(\alpha_{12})).$$

Пересечение $\gamma_1(\alpha_{11})$ с полуосью $x_n > 0$ определяет точку α_n, а пересечение с полуосью $x_n < 0$ определяет точку α_{n2}.

Числовая пара $(\alpha_{n1}, \alpha_{n2})$ определяет на $P_{n,n-1}$ прямоугольник $\gamma(\alpha_{11})$ с вершинами

$$(\alpha_{n1}, L_n(\alpha_{n1})), \quad (\alpha_{n1}, L_n(\alpha_{n2})), \quad (\alpha_{n2}, L_n(\alpha_{n1})), \quad (\alpha_{n2}, L_n(\alpha_{n2})).$$

Прямоугольник $\gamma_n(\alpha_{11})$ аналогичным образом определяет пару точек на оси x_{n-1} и т. д. Найдя пары $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2})$ и прямоугольники $\gamma_i(\alpha_{11})$ для всех $i \neq 2$, определяем $L_2(x_2)$ как функцию, удовлетворяющую условию $L_2(\alpha_{2k}) = \alpha_{1k}$, $k = 1, 2$, что дает возможность аналогичным образом построить $\gamma_2(\alpha_{11})$.

Изменяя α_{11} в пределах $0 < a_{11} < \alpha_{11} < A_{11}$, мы образуем на каждой плоскости $P_{i,i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, семейство прямоугольников $\gamma_i(\alpha_{11})$. Те стороны прямоугольников $\gamma_i(\alpha_{11})$, $a_{11} < \alpha_{11} < A_{11}$, $i = 1, \ldots, n$, для которых $x_i = \alpha_{ik}$, заполняют на $P_{i,i-1}$ область Σ_{ik}. Точки $(a_{11}, 0, \ldots, 0)$ и $(A_{11}, 0, \ldots, 0)$ вышеуказанным образом определяют для каждой координаты x_i пары (a_{i1}, a_{i2}) и (A_{i1}, A_{i2}).

* В физических задачах обычно требуется обеспечить притяжение не к O, а к замыканию некоторой ее достаточно малой окрестности $V(O)$. Следовательно, внутренний граничный ящик, вообще говоря, необязательно стягивать в точку.

Пусть $G_A = \{(x_1, \dots, x_n)\}$, где $A_{i2} < x_i < A_{i1}$; $G_a = \{(x_1, \dots, x_n)\}$, где $a_{i2} < x_i < a_{i1}$. Область $G_A - G_a$ обозначим буквой G.

Теорема. *Если* $\operatorname{sign} f_i = \operatorname{sign}(-1)^k$, *когда* $(0, \dots, 0, x_{i-1}, x_i, 0, \dots, 0) \in \Sigma_{ik}$, *то через каждую точку из* G *проходит некоторая Л-оболочка.*

Доказательство. Каждая точка $(\alpha_{11}, 0, \dots, 0)$ определяет некоторый ящик, проходящий через эту точку и разбивающий $F^{(n)}$ на две части — внутреннюю по отношению к этому ящику и внешнюю. Беря произвольную точку $a \in G$, находим на оси $x_1 > 0$ две точки a' и a'' такие, что a лежит вне (внутри) ящика g' (g''), определяемого

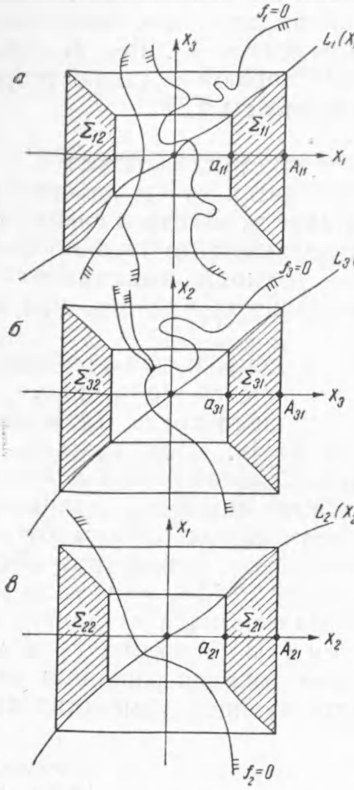

Рис. 1

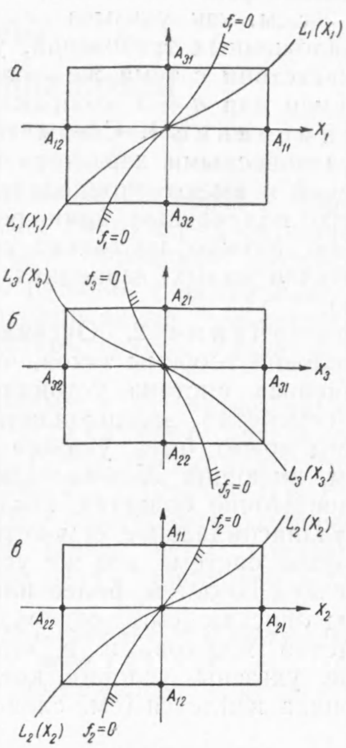

Рис. 2

точкой a' (a''). Сближая точки a' и a'' с сохранением их свойств, мы определяем точку b как дедекиндово сечение на оси x_1. Точка b определяет ящик g_b, который, очевидно, будет нести на себе точку a, так как каждое семейство $\gamma_i(\alpha_{11})$ $(i=1, \dots, n)$ непрерывно заполняет область, получающуюся от пересечения G и $P_{i,i-1}$. Итак, через каждую точку области G проходит некоторый ящик. Все они будут Л-оболочками на основании леммы 2, ч. т. д.

Эта теорема примечательна тем, что выполнение ее условий легко проверить. Действительно, все f_i непрерывны, их нулевые уровни являются цилиндрическими поверхностями и о распределении знаков f_i можно судить по расположению следов этих поверхностей на соответствующих плоскостях $P_{i,i-1}$ и знакам f_i в нескольких (для нашей цели достаточно двух) контрольных точках. О расположении областей Σ_{ik} легко судить по виду кривых L_i.

На рис. 1 изображен пример выполнения условий теоремы в случае $n = 3$ (штриховка, имеющая вид гребешков, поставленных около нулевых уровней $f_i = 0$, указывает, где $f_i < 0$).

Следствие. Если для f_i системы (1), $i = 1, 3, \ldots, n$, в окрестности $U(O) = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$, $A_{i2} < x_i < A_{i1}$, $A_{i2} < 0$, $A_{i1} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, выполнены условия: 1) $f_i(0, 0) = 0$; 2) пересечение нулевого уровня каждой функции f_i и плоскости $P_{i,i-1}$ расположено в некоторой паре несмежных координатных углов плоскости $P_{i,i-1}$ вне сектора $x_{i\ 1} = kx_i, |k| < \varepsilon$, где ε — некоторое произвольное положительное число; 3) $x_i f_i(x_i, 0) < 0$, то система (1) может быть стабилизирована выбором распределения знаков f_2, так как условия 1)—3) и этот выбор очевидным образом в состоянии обеспечить выполнение условий нашей теоремы в области $U(O)$, т. е. при $a_{11} = a_{12} = 0$. L_i, $i \neq 2$, выбираем в секторе $x_{i-1} = kx_i, |k| < \varepsilon$, в тех же квадрантах плоскости $P_{i,i-1}$, в которых лежат направляющие цилиндрических поверхностей $f_i = 0$. Затем, как указывалось выше, определяем L_2. Все f_i, $i \neq 2$, в силу наложенных требований, уже удовлетворяют условию теоремы. В соответствии с теми же условиями подбираем f_2.

Пример для $n = 3$ изображен на рис. 2.

Примечание 1. Следы линий $f_i = 0$ на $P_{i,i-1}$ называются в технике равновесными характеристиками, находятся путем лабораторных измерений и имеют определенную погрешность. В связи с этим отметим, что полученные нами результаты являются достаточно инвариантными. Можно не только утверждать, что они сохраняются при «достаточно малых» вариациях $f_i = 0$, но даже определить, при каких именно.

Примечание 2. Очевидно, характер притяжения при выполнении условий теоремы таков, что $|x_i|$ уменьшается монотонно.

Линейная система устойчива тогда и только тогда, если существует семейство эллипсоидальных $Л$-оболочек. Для каждой такой системы может быть указано множество близких к ней нелинейных систем, имеющих $Л$-оболочками то же самое семейство эллипсоидов. При достаточно больших отклонениях нелинейных систем от линейных эллипсоидальное семейство перестает быть семейством $Л$-оболочек; если система все же устойчива, то ее $Л$-оболочки надо искать среди поверхностей, более или менее отличающихся от эллипсоидов.

Мы описали (см. теорему) вид систем (1), которым соответствует семейство ящиков, и в одном широко распространенном частном случае указаны условия, когда соответствующее семейство ящиков наверняка найдется (см. следствие).

Поступило
26 VI 1953