

УДК 621.376

DOI 10.62595/1819-5245-2026-2-110-117

АНАЛИЗ ЯВЛЕНИЯ АВТОМОДУЛЯЦИИ В ЦЕПЯХ С УПРАВЛЯЕМОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ МЕТОДОМ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ АМПЛИТУД

Д. В. КОМНАТНЫЙ

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Выполнен теоретический анализ явления автомодуляции в нелинейной схеме с управляемой индуктивностью. Анализ электрических режимов работы цепи осуществлен макроскопическим методом. Получены дифференциальные нелинейные уравнения управляющей и управляемой цепей. Эти уравнения решены методом медленно меняющихся амплитуд. Полиномиальная аппроксимация основной кривой намагничивания сердечников позволила получить сравнительно несложные расчетные соотношения, которые соответствуют процессам, наблюдающимся на опыте. Таким образом, получена теоретическая модель явления автомодуляции, выявлены его причины и особенности. Модель имеет методические достоинства для преподавания курса теоретических основ электротехники.

Ключевые слова: автомодуляция, макроскопический метод, метод медленно меняющихся амплитуд, уравнение ван дер Поля, основная кривая намагничивания, полиномиальная аппроксимация, теоретические основы электротехники.

Для цитирования. Комнатный, Д. В. Анализ явления автомодуляции в цепях с управляемой индуктивностью методом медленно меняющихся амплитуд / Д. В. Комнатный // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого. – 2026. – № 2 (105). – С. 110–117. <https://doi.org/10.62595/1819-5245-2026-2-110-117>

ANALYSIS OF THE PHENOMENON OF SELF-MODULATION IN CIRCUITS WITH CONTROLLED INDUCTANCE USING THE METHOD OF SLOWLY VARYING AMPLITUDES

D. V. KOMNATNY

*Sukhoi State Technical University of Gomel,
the Republic of Belarus*

A theoretical analysis of the self-modulation phenomenon in a nonlinear circuit with controlled inductance was performed. The circuit's electrical operating modes were analyzed using a macroscopic method. Nonlinear differential equations for the control and driven circuits were derived. These equations were solved using the slowly varying amplitude method. A polynomial approximation of the fundamental magnetization curve of the cores allowed for the derivation of relatively simple calculation relationships that correspond to processes observed experimentally. Thus, a theoretical model of the self-modulation phenomenon was obtained, and its causes and characteristics were identified. The model has methodological advantages for teaching a course on the theoretical foundations of electrical engineering.

Keywords: self-modulation, macroscopic method, slowly varying amplitude method, van der Pol equation, fundamental magnetization curve, polynomial approximation, theoretical foundations of electrical engineering.

For citation. Komnatny D. V. Analysis of the phenomenon of self-modulation in circuits with controlled inductance using the method of slowly varying amplitudes. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2026, no. 2 (105), pp. 110–117 (in Russian). <https://doi.org/10.62595/1819-5245-2026-2-110-117>

Введение

В сороковых-пятидесятых годах XX в. началось широкое внедрение магнитных устройств автоматики: магнитных усилителей, преобразователей частоты, генераторов электрических колебаний. Все эти устройства основаны на катушках индуктивности с ферромагнитными сердечниками, которые обладают нелинейными характеристиками. Следовательно, в этих устройствах происходят нелинейные колебания. Было выполнено значительное число работ по исследованию нелинейных режимов работы указанных устройств. В частности, исследован режим автомодуляции, т. е. периодического или квазипериодического самопроизвольного изменения амплитуды колебаний во времени [1–3].

К концу XX – началу XXI в. применение магнитных устройств в автоматике пошло на убыль. Соответственно, новые исследования по этой тематике, в том числе исследования режимов автомодуляции, стали публиковаться крайне редко. Однако обострилась проблема качества электроэнергии [4]. В этой связи анализ автомодуляционных режимов, возникающих в устройствах энергосистем, сохраняет актуальность, так как такие режимы недопустимо ухудшают качество электрической энергии [5].

Основой для исследования автомодуляции в технических устройствах является выявление особенностей и существенных свойств этого явления с помощью теоретической модели. Тем не менее теоретические модели, представленные в литературных источниках [1–3], имеют существенные недостатки. В них применена аппроксимация характеристик нелинейных катушек индуктивности гиперболическим синусом, что требует привлечения в расчетах функций Бесселя мнимого аргумента. Результаты расчетов громоздки, из них остается неясным факт возникновения автомодуляции, а особенности этого явления не устанавливаются. Расчетные зависимости представлены в плохо обозримой графической форме. Все это затрудняет исследование автомодуляции, как для практических приложений, так и в целях преподавания.

С другой стороны, в [5] для анализа сложных цепей с управляемыми индуктивностями предложен макроскопический метод (макрометод), являющийся развитием метода медленно меняющихся амплитуд (метода ван дер Поля) применительно к нелинейным схемам с несколькими цепями. Метод ван дер Поля является одним из фундаментальных методов теории колебаний [6]. Из всех методов, основанных на принципе малого параметра, метод ван дер Поля отличается большей простотой и легкостью применения [5, 7].

Поэтому в работе поставлена цель – осуществить анализ явления автомодуляции в модельной электрической схеме макроскопическим методом. При этом использовать такую аппроксимацию характеристик нелинейных индуктивностей, которая позволит упростить расчеты, исключить применение специальных функций и получить результаты с ясным физическим смыслом.

Описание модельной электрической схемы

Для анализа режима автомодуляции в статье рассматривается модельная электрическая схема с управляемой индуктивностью. Конструкция схемы основывается на схемах, рассмотренных в [5], и приближена к практике эксплуатации электрических установок. Схема состоит из двух ферромагнитных сердечников. Сердечники имеют рабочие обмотки и общую управляющую обмотку. Рабочие обмотки включены последовательно друг с другом и с мостовым диодным выпрямителем. Выпрямленное напряжение с выхода выпрямителя питает управляющую обмотку. Управляющая обмотка, выпрямитель, настроечный резистор и конденсатор образуют управляющую цепь.

Модельная схема питается от генератора переменного синусоидального напряжения с известными круговой частотой и амплитудой напряжения. Таким образом, последовательное соединение рабочих обмоток и генератора образует управляемую (рабочую) цепь. Модельная схема представлена на рис. 1.

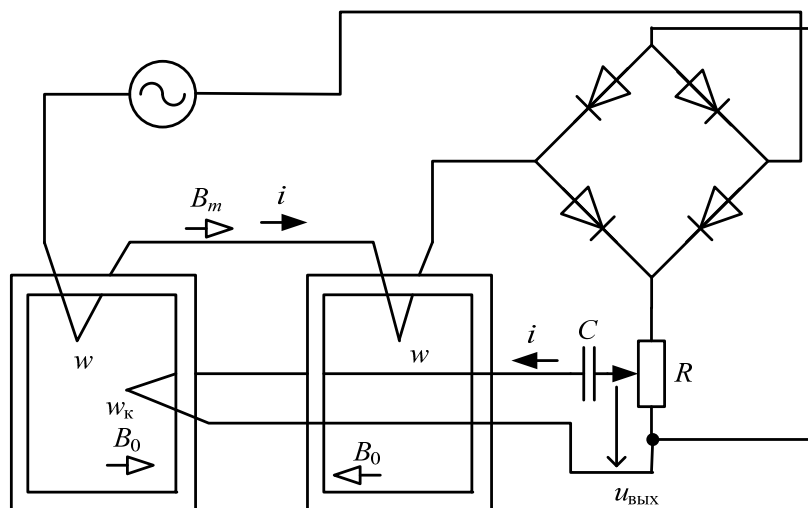


Рис. 1. Модельная схема для исследования явления автомодуляции

Для расчета режимов работы данной схемы используется макроскопический метод, который заключается в составлении независимых нелинейных дифференциальных уравнений для управляющей и управляемой (рабочей) цепей и решении этих уравнений последовательно. Для решения уравнений применяется наиболее адекватный метод. В данном случае таким методом является метод медленно меняющихся амплитуд [5–7].

Дифференциальное уравнение управляющей цепи и его решение

При выводе уравнения для управляющей цепи предполагается, что напряжение на выходе выпрямителя медленно меняется во времени. Тогда на основании второго закона Кирхгофа для одноконтурной управляющей цепи имеем:

$$\frac{d\Psi}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = u_{\text{ВЫХ}}, \quad (1)$$

где Ψ – потокосцепление, Вб; i – ток в цепи, А; R – сопротивление резистора, Ом; C – емкость конденсатора, Ф; t – время, с; $u_{\text{ВЫХ}}$ – выходное напряжение выпрямителя, В.

Предполагается, что

$$\Psi = w_k B_0 S, \quad i = a B_0,$$

где w_k – число витков управляющей обмотки; S – площадь сечения сердечника, м²; B_0 – магнитная индукция в сердечнике, Тл.

Тогда из (1) получается:

$$\frac{d^2 B_0}{dt^2} + \left(\frac{Ra}{w_k S} - \frac{1}{w_k S} \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dB_0} \right) \frac{dB_0}{dt} + \frac{a}{w_k SC} B_0 = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что зависимость выходного напряжения от магнитной индукции управляющей обмотки имеет вид [5]:

$$u_{\text{вых}}(B_0) = b_0 + b_1 B_0 - b_2 B_0^3, \quad (3)$$

где b_0 , b_1 , b_2 – константы.

Вводятся параметры:

$$k_1 = \frac{1}{w_k S} b_1 - \frac{Ra}{w_k S}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{a}{w_k S C}}, \quad k_2 = \frac{3b_2}{b_1 - Ra}.$$

Также вводится нормированная неизвестная величина:

$$x = \sqrt{k_2} B_0.$$

Подстановка (3) в (2) с использованием параметров и нормированной неизвестной позволяет привести (2) к уравнению ван дер Поля:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - k_1(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + k_3^2 x = 0. \quad (4)$$

Исследование уравнения (4) методом фазовой плоскости [8] показывает, что в цепи, описываемой данным уравнением, могут возникать незатухающие колебания. В [5] получено решение уравнения ван дер Поля (4) методом медленно меняющихся амплитуд и показано, что установившееся решение имеет вид $x = 2 \sin k_3 t$. Тогда решение уравнения (2) в денормированной форме имеет вид $B_0 = \frac{2}{\sqrt{k_2}} \sin k_3 t$.

Отметим, что уравнение (2) приведено в [5], но решение его не получено.

Дифференциальное уравнение управляемой цепи и его решение

На основании второго закона Кирхгофа для контура управляемой цепи уравнение цепи имеет вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} + R_k i = U_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (5)$$

где R_k – сопротивление рабочих обмоток, Ом; U_m – амплитуда напряжения генератора, В; ω – круговая частота, рад/с; φ – угол сдвига фаз между напряжением генератора и током рабочих обмоток, рад.

Потокоцепление в рабочих обмотках, включенных последовательно, $\Psi(t) = 2wSB(t)$.

В статье использована полиномиальная аппроксимация основной кривой намагничивания ферромагнитного материала сердечников [5]:

$$H = a_1 B + a_2 B^3, \quad (6)$$

где H – напряженность магнитного поля в сердечнике, А/м; a_1 , a_2 – коэффициенты интерполяционного полинома.

Ток в рабочей обмотке и напряженность магнитного поля связаны законом полного тока [5]. При этом следует учесть, что в одном из сердечников векторы магнитной индукции от управляющей и управляемой цепей направлены одинаково, а в дру-

гом сердечнике – противоположно (рис. 1). Тогда выражения закона полного тока для рабочих обмоток имеют вид:

$$i_{11}w_{11} + i_k w_k = Hl = l(a_1(B_0 + B_m) + a_2(B_0 + B_m)^3); \quad (7)$$

$$i_{12}w_{12} - i_k w_k = Hl = l(a_1(-B_0 + B_m) + a_2(-B_0 + B_m)^3), \quad (8)$$

где i_{11} , i_{12} – токи в рабочих обмотках, А; i_k – ток в управляющей обмотке, А; w_{11} , w_{12} – число витков рабочих обмоток; l – длина средней линии сердечника, м; B_m – магнитная индукция в сердечниках, созданная током рабочих обмоток. Причем $i_{11} = i_{12} = i$, так как рабочие обмотки включены последовательно.

После возведения в куб и раскрытия скобок выражения (7) и (8) можно почленно сложить, что дает:

$$iw = l[2a_1B_m(t) + 6a_2B_0B_m(t) + 2a_2B_m^3(t)], \quad (9)$$

где w – сумма витков рабочих обмоток.

Выражение для магнитной индукции рабочих обмоток ищем в виде $B_m = B_m(t)\sin\omega t$.

При этом учитываем только первую гармонику, поэтому $B_m^3(t)\sin^3\omega t \approx \frac{3}{4}B_m^3(t)\sin\omega t$.

Тогда для тока в рабочих обмотках справедливо соотношение

$$i = \frac{l}{w} \left[2a_1B_m(t) + 6a_2B_0^2B_m(t) + \frac{3}{2}a_2B_m^3(t) \right] \sin\omega t. \quad (10)$$

Выражение (10) показывает, что в цепи действительно происходит автомодуляция, т. е. периодическое изменение амплитуды тока управляемой цепи во времени. При этом зависимость амплитуды тока от времени значительно более сложная, чем при амплитудной модуляции в радиотехнических схемах [9]. Этот вывод о форме изменяющейся амплитуды соответствует результатам, полученным в [1, 5] путем аппроксимации основной кривой намагничивания материала сердечников гиперболическим синусом. Следовательно, оба метода аппроксимации приводят к качественно сходным выводам.

Для решения уравнения (5) применяется метод медленно меняющихся амплитуд. В соответствии с этим методом [5, 8] предполагается, что амплитуда магнитной индукции рабочих обмоток меняется значительно медленнее, чем электрический угол ωt . Тогда первой производной амплитуды магнитной индукции можно пренебречь, и первая производная потокосцепления по времени приближенно равна:

$$\frac{d\Psi}{dt} \approx 2\omega wSB_m(t)\cos\omega t. \quad (11)$$

В (5) подставляем выражения (10) и (11). После чего к уравнению (5) применяется принцип гармонического баланса [5]. Таким образом, получается система уравнений:

$$\begin{cases} 2\omega wSB_m(t) = U_m \sin\varphi; \\ \frac{R_k l}{w} \left[2a_1B_m(t) + 6a_2B_0^2B_m(t) + \frac{3}{2}a_2B_m^3(t) \right] = U_m \cos\varphi. \end{cases} \quad (12)$$

Уравнения системы (12) возводятся в квадрат и складываются почленно. После этого получается уравнение шестой степени для медленно меняющейся амплитуды магнитной индукции:

$$\left[(2w\omega S)^2 + \left(\frac{R_k I}{w} \right)^2 (2a_1 + 6a_2 B_0^2(t))^2 \right] B_m^2(t) + 3 \left(\frac{R_k I}{w} \right)^2 (2a_1 + 6a_2 B_0^2(t)) B_m^4(t) + \frac{9}{4} \left(\frac{R_k I}{w} \right)^2 a_2^2 B_m^6(t) = U_m. \quad (13)$$

С помощью подстановки $B_x(t) = B_m^2(t)$ степень уравнения понижается до третьей:

$$\left[(2w\omega S)^2 + \left(\frac{R_k I}{w} \right)^2 (2a_1 + 6a_2 B_0^2(t))^2 \right] B_x(t) + 3 \left(\frac{R_k I}{w} \right)^2 (2a_1 + 6a_2 B_0^2(t)) B_x^2(t) + \frac{9}{4} \left(\frac{R_k I}{w} \right)^2 a_2^2 B_x^3(t) = U_m. \quad (14)$$

Чтобы осуществить расчет по этому уравнению, следует для определенного момента времени t найти значение магнитной индукции поля управляющей обмотки по полученному выше решению. Затем это значение подставляется в уравнение (14) и находится значение магнитной индукции поля управляемой обмотки путем решения алгебраического уравнения, в частности, по известной формуле Кардано. К сожалению, аналитическое решение уравнения имеет громоздкую форму, и привести его в статье затруднительно. Зная значение магнитной индукции, можно найти ток в управляемой обмотке по формуле (10).

Заключение

Полученные в статье результаты позволяют сделать следующие выводы.

При решении нелинейных дифференциальных уравнений модельной схемы с использованием полиномиальной аппроксимации основной кривой намагничивания ферромагнитных сердечников режим автомодуляции выявляется. Следовательно, указанная аппроксимация правильно описывает физические процессы в схеме.

Применение закона полного тока к рабочей обмотке нелинейной управляемой индуктивности позволяет выявить режим автомодуляции амплитуды тока в рабочей обмотке схемы. Причем из полученного расчетного соотношения для тока ясно видно, что амплитуда тока меняется во времени. Это явное выражение оказалось возможным получить благодаря более простой аппроксимации основной кривой намагничивания. Также расчетное соотношение показывает сложный характер изменения амплитуды тока во времени, что соответствует результатам [1–3].

Последовательное решение уравнения ван дер Поля для управляющей обмотки показывает наличие медленно меняющейся амплитуды магнитной индукции в цепи. Эти медленные изменения амплитуды являются одной из основных причин возникновения автомодуляции наряду с нелинейными свойствами сердечников катушек. Применение метода ван дер Поля для решения дифференциального нелинейного уравнения рабочей обмотки позволяет получить расчетное уравнение для магнитной индукции в сердечниках.

Полученные расчетные соотношения значительно проще, чем в [1–3], и не требуют графических построений.

Следовательно, можно заключить, что в статье разработана теоретическая модель автомодуляции в нелинейных электрических цепях с управляемой индуктивностью. Модель выявляет причины автомодуляции, дает математическое описание процессам модуляции и позволяет рассчитать ход процесса. Поэтому можно полагать, что она имеет такой же научный уровень, что и модели нелинейных колебательных процессов, представленные в [6].

Необходимо отметить, что сравнительно простой математический аппарат модели дает возможность применения ее в курсе теоретических основ электротехники, как для изучения явления автомодуляции, так и для освоения одного из фундаментальных методов теории нелинейных колебаний – метода медленно меняющихся амплитуд. Поэтому представленная модель имеет и существенные методические достоинства, позволяет обеспечить и углубленную теоретическую, и практико-ориентированную подготовку студентов энергетических специальностей.

Литература

1. Бессонов, Л. А. Автоколебания (автомодуляция) в электрических цепях со сталью / Л. А. Бессонов. – М. ; Л. : Госэнергоиздат, 1958. – 304 с.
2. Боголюбов, В. Е. Квазирелаксационные колебания в феррорезонансных цепях с подмагничиванием : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.09.05 / Боголюбов Валентин Евгеньевич ; Моск. энергет. ин-т. – М., 1955. – 48 с.
3. Боголюбов, В. Е. Расчет квазирелаксационных колебаний в феррорезонансных цепях с дросселем насыщения / В. Е. Боголюбов // Электричество. – 1951. – № 8. – С. 64–68.
4. Кобозев, В. А. Качество электроэнергии и энергоэффективность систем электроснабжения потребителей / В. А. Кобозев, И. В. Лыгин. – М. ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. – 356 с.
5. Бессонов, Л. А. Нелинейные электрические цепи / Л. А. Бессонов. – М. : Высш. шк., 1977. – 343 с.
6. Бутенин, Н. В. Введение в теорию нелинейных колебаний / Н. В. Бутенин, Ю. Н. Неймарк, Н. А. Фуфаев. – М. : Наука, 1976. – 384 с.
7. Основы инженерной электрофизики / П. А. Ионкин, А. А. Соколов, Ф. Е. Пашуканис [и др.]. – М. : Высш. шк., 1972. – 636 с.
8. Филиппов, Е. Нелинейная электротехника / Е. Филиппов. – М. : Энергия, 1968. – 504 с.
9. Иванов, М. Т. Радиотехнические цепи и сигналы / М. Т. Иванов, А. Б. Сергиенко, В. Н. Ушаков. – СПб. : Питер, 2014. – 336 с.

References

1. Bessonov L. A. *Self-sustained oscillations (self-modulation) in electrical circuits with silicon-sheet steel*. Moscow-Leingrad, Gosenergoizdat Publ, 1958. 304 p. (in Russian).
2. Bogoljubov V. E. *Quasi-relaxation oscillations in ferroresonance circuits with biasing*. Moscow, 1955. 48 p. (in Russian).
3. Bogoljubov V. E. Calculation of quasi-relaxation oscillations in ferroresonance circuits with saturable reactor. *Elektrichestvo = Electricity*, 1951, no. 8, pp. 64–68 (in Russian).
4. Kobozev V. A., Lygin I. V. *Electric power quality and efficacy of loads power supply systems*. Moscow-Vologda, Infra-Ingenerija Publ., 2022. 343 p. (in Russian).
5. Bessonov L. A. *Non-linear electrical circuits*. Moscow, Vysshaja shkola Publ., 1977. 343 p. (in Russian).
6. Butenin N. V., Nejmark Ju. N., Fufaev N. A. *Introduction into theory of non-linear oscillations*. Moscow, Nauka Publ., 1976. 384 p. (in Russian).

7. Ionkin P. A., Sokolov A. A., Pashukanis F. E., Bogoljubov V. E., Koporsky A. S., Mironov, V. G. *Principles of engineering electrical physics*. Moscow, Vysshaja shkola Publ., 1972. 343 p. (in Russian).
8. Filippov E. *Non-linear electrical engineering*. Moscow, Energija Publ., 1968. 504 p. (in Russian).
9. Ivanov M. T., Sergeenko A. B., Ushakov V. N. *Radio engineering circuits and signals*. Sankt-Peterburg, Piter Publ., 2014. 336 p. (in Russian).

Поступила 26.02.2026 г.