

## МЕТОДЫ РАСЧЕТА И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ В СБОРЕ

**А. В. КАПИТОНОВ**

*Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования «Белорусско-Российский университет», г. Могилев, Республика Беларусь*

*Приведены исследования точности зубчатых, червячных и планетарных с промежуточными телами качения механических передач в сборе. Расчет и контроль точности механической передачи в сборе по комплексному показателю, которым является кинематическая погрешность, позволяет оценивать качество производства готового изделия. Проведены расчеты и анализ кинематической погрешности зубчатых и червячных передач на основе известных стандартов и показано незначительное отличие числовых значений допусков на кинематическую погрешность этих передач. Разработаны методы, методики и математические зависимости для расчета кинематической погрешности исследуемых механических передач в сборе с учетом погрешностей циклических и монтажа. Проведена экспериментальная оценка кинематической погрешности планетарных передач с промежуточными телами качения и сравнительный анализ точности этих передач с зубчатыми передачами. Проведен спектральный анализ кинематической погрешности планетарного редуктора с промежуточными телами качения и определены ее наиболее значимые гармонические составляющие с целью установления допусков на изготовление деталей редуктора и сравнения с гармоническими составляющими зубчатых передач. На основе результатов теоретических и экспериментальных исследований сделаны выводы о возможности использования единых допусков на кинематическую погрешность для зубчатых, червячных и планетарных с промежуточными телами качения передач в сборе, что упрощает конструкторское и технологическое проектирование и позволяет применять единые методы контроля на специализированных стендах.*

**Ключевые слова:** точность механических передач, кинематическая погрешность, методы расчета, сравнительный анализ, гармонические составляющие.

**Для цитирования.** Капитонов, А. В. Методы расчета и сравнительный анализ точности механических передач в сборе / А. В. Капитонов // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого. – 2026. – № 2 (105). – С. 5–19. <https://doi.org/10.62595/1819-5245-2026-2-5-19>

## METHODS OF CALCULATION AND COMPARATIVE ANALYSIS OF THE ACCURACY OF MECHANICAL TRANSMISSION ASSEMBLIES

**A. V. KAPITONOV**

*Inter-State Educational Institution of Higher Education “Belarusian-Russian University”, Mogilev, the Republic of Belarus*

*This article presents studies of the accuracy of assembled mechanical transmissions with gears, worm gears, and planetary gears with intermediate rolling elements. Calculating and monitoring the accuracy of assembled mechanical transmissions using a complex indicator, namely, kinematic error, allows for assessing the production quality of the finished product. Calculations and analysis of the kinematic error of gears and worm gears based on known standards are performed, demonstrating insignificant differences in the numerical values of kinematic error tolerances for these transmissions. Methods, techniques, and mathematical relationships are developed for calculating the kinematic error of assembled mechanical transmissions under study, taking into account cyclic and assembly errors. An experimental evaluation of the kinematic error of planetary gears with intermediate rolling elements and a comparative analysis*

*of the accuracy of these transmissions with gear transmissions are conducted. A spectral analysis of the kinematic error of a planetary gearbox with intermediate rolling elements was conducted, and its most significant harmonic components were determined. These components were used to establish tolerances for the manufacture of gearbox components and for comparison with the harmonic components of gear drives. Based on the results of theoretical and experimental studies, conclusions were drawn regarding the feasibility of using uniform kinematic error tolerances for gear, worm, and planetary gearbox assemblies with intermediate rolling elements. This simplifies design and technological development and enables the use of uniform testing methods on specialized test benches.*

**Keywords:** accuracy of mechanical transmissions, kinematic error, calculation methods, comparative analysis, harmonic components.

**For citation.** Kapitonov A. V. Methods of calculation and comparative analysis of the accuracy of mechanical transmission assemblies. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2026, no. 2 (105), pp. 5–19 (in Russian). <https://doi.org/10.62595/1819-5245-2026-2-5-19>

## Введение

Одним из основных комплексных показателей точности зубчатых, червячных и передач с промежуточными телами качения является кинематическая погрешность. Этот комплексный показатель необходимо рассчитывать и обеспечивать при изготовлении и контроле передачи в сборе, т. е. готового механизма, например, редуктора. Обеспечение рассчитанной кинематической погрешности механической передачи в сборе позволяет контролировать и оценивать качество изготовления собранного механизма с учетом всех его деталей, а не только деталей зацепления. Так как кинематическая погрешность относится к показателю, применимому для разных типов механических передач, характеризующему их кинематическую точность и плавность работы, а также влияет на полноту контакта и боковой зазор передачи, то важной задачей является расчет численного значения кинематической погрешности для разных типов передач в сборе.

Проведен анализ исследований точности при проектировании и изготовлении разных типов механических передач. В работе [1] рассмотрены вопросы, связанные с оценкой упругих деформаций и их влиянием на кинематическую точность планетарных шариковых и роликовых передач. В [2] исследуется эффективность вращательного векторного редуктора промышленного робота. Рассматриваются зазоры между деталями в сборочной цепи размеров методом экстремальных значений. В [3] рассмотрен принцип и контроль качества сборки мелко модульных цилиндрических зубчатых передач, обеспечивающих минимизацию кинематической погрешности. Даны оценки кинематической погрешности, приведены рекомендации по выбору взаимного положения зубчатых колес в процессе сборки передач. В работе [4] определялась чувствительность эксцентриковой роликовой передачи к производственным дефектам кулачкового колеса. В [5] исследовалась циклоидально-зубчатая передача, используемая в шарнирах промышленных роботов и прецизионных станках. Решалась проблема погрешности обработки и упругой деформации компонентов на полноту контакта зубчатого колеса с зубьями циклоидальной шестерни. В [6] представлен метод анализа кинематических ошибок и проектирования допусков циклоидальных редукторов. Введены и исследованы взаимосвязи между параметрами геометрии и точности изготовления циклоидального редуктора с помощью теории зубчатых передач. В работах [7, 8] проведен анализ влияния кинематических параметров на характеристики штифтового циклоидального планетарного механизма. Изучено влияние конструктивных и технологических ошибок на точность передачи штифтово-циклоидного привода. Определены способы контроля и регулирования основных ошибок, что позволяет повысить точность передачи. В работе [9] представлены исследования, связанные с повышением КПД и контролем качества новых конструкций планетарных передач с промежуточными телами качения, имеющих

более высокие кинематические и динамические характеристики. В [10] изложены сведения о нормах и показателях точности зубчатых передач. Показана взаимосвязь погрешностей изготовления, выявленных при контроле, с причинами их появления.

В этих исследованиях не представлены методики расчета комплексного показателя точности – кинематической погрешности передачи в сборе, которые можно применять для разных типов зубчатых передач.

Целью работы является разработка методики и формул расчета кинематической погрешности зубчатых и червячных передач в сборе, а также планетарных передач с промежуточными телами качения; обоснование и разработка единых допусков на кинематическую погрешность для исследуемых типов механических передач; сравнительный анализ кинематической погрешности и гармонических составляющих ее амплитудно-частотного спектра планетарного редуктора с промежуточными телами качения с зубчатыми передачами в сборе с установлением связей наиболее значимых гармонических составляющих с погрешностями изготовления деталей.

#### Анализ стандартов на допуски зубчатых передач

В ГОСТ 1643-81 на допуски цилиндрических зубчатых передач кинематическая погрешность передачи определяется суммой допусков на кинематические погрешности ее зубчатых колес, находящихся в зацеплении. При этом допуск на кинематическую погрешность колеса определяется суммой допусков на накопленную погрешность шага  $F_p$  и погрешность профиля зуба  $f_f$ . Тогда допуск на кинематическую погрешность цилиндрической зубчатой передачи, в соответствии с ГОСТ 1643-81, можно определить по формуле

$$F_{io} = F_{i1} + F_{i2} = F_{p1} + f_{f1} + F_{p2} + f_{f2}, \quad (1)$$

где  $F_{io}$  – допуск на кинематическую погрешность передачи;  $F_{i1}$  – допуск на кинематическую погрешность ведущего колеса (шестерни);  $F_{i2}$  – допуск на кинематическую погрешность ведомого колеса;  $F_{p1}$  – допуск на накопленную погрешность ведущего колеса;  $f_{f1}$  – допуск на погрешность профиля ведущего колеса;  $F_{p2}$  – допуск на накопленную погрешность ведомого колеса;  $f_{f2}$  – допуск на погрешность профиля ведомого колеса.

По ГОСТ 1758-81, в котором приводятся допуски на передачи зубчатые конические и гипоидные, кинематическая погрешность передачи рассчитывается также суммированием кинематических погрешностей ведущего и ведомого зубчатых колес. На основе этого стандарта допуск на кинематическую погрешность передачи можно записать в виде:

$$F_{io} = F_{i1} + F_{i2} = F_{p1} + 1,15f_{c1} + F_{p2} + 1,15f_{c2}, \quad (2)$$

где  $f_{c1}$  – допуск на погрешность обката зубцовой частоты ведущего звена;  $f_{c2}$  – допуск на погрешность обката зубцовой частоты ведомого звена.

В стандарте ГОСТ 3675-81, описывающем допуски на червячные цилиндрические передачи, допуск на кинематическую погрешность передачи на основе этого стандарта можно рассчитать по формуле

$$F_{io} = F_p + f_{zco}, \quad (3)$$

где  $F_p$  – допуск на накопленную погрешность шага червячного колеса;  $f_{zco}$  – допуск на циклическую погрешность зубцовой частоты в червячной передаче.

В межгосударственном стандарте ГОСТ ISO 1328-1-2017 на передачи зубчатые цилиндрические допуск на кинематическую погрешность зубчатого колеса  $F_{isT}$  определяется по формуле

$$F_{isT} = F_{pT} + f_{isT,max}, \quad (4)$$

где  $F_{pT}$  – допуск на накопленную погрешность шага зубчатого колеса;  $f_{isT,max}$  – допуск местной кинематической погрешности зубчатого колеса.

Формула для расчета кинематической погрешности зубчатой пары в этом стандарте не представлена. Приводится формула для расчета измерений на испытательном приборе, включающая углы поворота шестерни и колеса:

$$\theta_e = \theta_2 - \frac{z_1}{z_2} \theta_1, \quad (5)$$

где  $\theta_e$  – кинематическая погрешность зубчатой пары в угловых величинах;  $\theta_2$  – угол поворота колеса;  $z_1$  – число зубьев шестерни;  $z_2$  – число зубьев колеса;  $\theta_1$  – угол поворота шестерни.

Анализ приведенных выше стандартов и формул позволяет сделать определенные выводы. Формулы (1)–(5) не полностью характеризуют кинематическую погрешность передачи в сборе (т. е. от рабочей оси, как указано в рассматриваемых стандартах), так как на производстве допуски из таблиц ГОСТов принимают для зубчатых колес без пересчета от технологической оси. В формуле (1) учитывается накопленная погрешность шага  $F_{p2}$  ведомого колеса, которая в амплитудно-частотном спектре кинематической погрешности проявляется в первых гармониках, и накопленная погрешность шага  $F_{p1}$  ведущего колеса, которая проявляется в гармониках с номерами кратными передаточному отношению. Накопленная погрешность шага зависит от радиального биения зубчатого венца и погрешности обката или колебания длины общей нормали, которые связаны с отклонением углового шага или шага зацепления. Показатель  $F_p$  не характеризует зубцовую частоту и кратные ей частоты, которые могут проявляться в спектре кинематической погрешности при работе передачи в сборе.

Формула (2) учитывает накопленную погрешность шага  $F_p$  ведущего и ведомого колеса и зубцовую частоту ведомого звена, но не учитывает зубцовые частоты кратные числу зубьев ведомого колеса и погрешности профиля ведущего и ведомого зубчатых колес, которые могут влиять на кинематическую погрешность передачи в значимых гармониках с разными частотами.

Формула (3) не учитывает погрешности червяка, а также погрешность профиля червячного колеса и циклические погрешности зубцовой частоты кратные числу зубьев червячного колеса, которые могут проявляться при гармоническом анализе кинематической погрешности передачи в сборе.

В приведенных выше ГОСТах и формулах (1)–(3) на основе этих стандартов не представлены погрешности монтажа при сборке передачи и формулы их расчета.

Формула (4) учитывает накопленную погрешность шага и местную кинематическую погрешность колеса и с учетом формулы (5) используется для расчета кинематической погрешности передачи. ГОСТ ISO 1328-1-2017 указывает, что при расчете кинематической погрешности нужно учитывать погрешности монтажа зубчатых ко-

лес с валами, подшипниками и корпусом, однако этот стандарт не приводит методик расчета и численных значений этих погрешностей. Местная кинематическая погрешность, согласно ГОСТам, включает в основном погрешности шага и профиля колес и не может выделить погрешность зубцовой частоты, которая в значительной степени характеризует плавность работы собранной передачи.

Стандарт ГОСТ 21098-82 представляет кинематические цепи и методы расчета их точности для определения кинематической погрешности передачи и погрешностей ее монтажа. В этом стандарте показатели точности из ГОСТ 1643-81 для зубчатых колес рассматриваются от измерительной оси, тогда как в ГОСТ 1643-81 они указаны от рабочей оси. Методики расчета и математические зависимости в ГОСТ 21098-82 дают численные значения при расчетах, которые не согласуются со значениями, полученными из таблиц и формул, приведенных в ГОСТах на зубчатые и червячные передачи.

Международные стандарты, разработанные для зубчатых передач, устанавливающие показатели точности и допуски на изготовление (ISO 1328-2:2020, DIN ISO 1328-1-2018, DIN ISO 1328-2-2021, ANSI/AGMA ISO 1328-1-B14, ANSI/AGMA ISO 1328-2-A21) применимы только к отдельным зубчатым колесам или к паре колес и не применимы к передаче в сборе. Они не содержат математических зависимостей, связывающих отдельные показатели точности для расчета кинематической погрешности передачи в сборе.

#### **Методика расчета и сравнительный анализ кинематической погрешности механических передач**

Проведены теоретические исследования, связанные с расчетами и оценкой кинематической погрешности цилиндрических, конических и гипоидных зубчатых и червячных цилиндрических передач с учетом [11, 12] и на основе ГОСТ 1643-81, ГОСТ 1758-81, ГОСТ 3675-81. В соответствии с допусками, приведенными в таблицах этих стандартов на отдельные показатели точности, по формулам (1)–(3) рассчитаны допуски на кинематическую погрешность передачи.

В каждой из формул (1)–(3) в соответствии со стандартами учитывался допуск на накопленную погрешность шага  $F_p$ , который составляет наибольшую часть от допуска на кинематическую погрешность и имеет одинаковые значения для всех рассматриваемых механических передач в таблицах ГОСТ 1643-81, ГОСТ 1758-81, ГОСТ 3675-81.

Допуск на кинематическую погрешность передачи определялся на основе методики, представленной в ГОСТ 21098-82 на кинематические цепи, с учетом погрешностей монтажа  $E_{\Sigma M}$  по разработанной и предлагаемой формуле

$$F_{к.п} = \sqrt{(F_p + f_f)_{ш}^2 + E_{\Sigma M}^2} + \sqrt{(F_p + f_f)_к^2 + E_{\Sigma M}^2} . \quad (6)$$

В формуле (6) показатели точности под первым корнем относятся к шестерне или червяку, а под вторым корнем относятся к колесу.

В качестве примера в табл. 1 приведены допуски на показатели точности в соответствии с ГОСТ 1643-81, ГОСТ 1758-81, ГОСТ 3675-81 и допуски на кинематическую погрешность, рассчитанные по формулам (1)–(3) и (6) для зубчатых цилиндрических, конических, гипоидных, а также червячных цилиндрических передач с одинаковым диапазоном делительных диаметров и модулей.

Допуски на показатели точности зубчатых и червячных передач

| Параметры  | Цилиндрическая зубчатая передача |            | Коническая и гипоидная зубчатая передача |               | Червячная передача |              |
|--|----------------------------------|------------|--|---------------|--------------------|--------------|
|  | шестерня                         | колесо     | шестерня                                 | колесо        | червяк             | колесо       |
| Делительный диаметр, мм  | 100                              | 400        | 100                                      | 400           | –                  | 400          |
| Модуль, мм   | 3,5                              | 3,5        | 3,5                                      | 3,5           | 3,5                | 3,5          |
| Допуск на накопленную погрешность шага $F_p$ , мкм                 | 32<br>(45)                       | 63<br>(90) | 32<br>(45)                               | 63<br>(90)    | 32<br>(45)         | 63<br>(90)   |
| Допуск на погрешность профиля зуба $f_f$ , мкм                     | 8<br>(11)                        | 9<br>(13)  | –  | –             | –                  | –            |
| Допуск на погрешность обката зубцовой частоты $1,15f_c$ , мкм      | –                                | –          | 5,8<br>(9,2)                             | 8,1<br>(10,4) | –                  | –            |
| Допуск на циклическую погрешность зубцовой частоты $f_{zco}$ , мкм | –                                | –          | –  | –             | –                  | 10,5<br>(16) |
| Погрешность монтажа $E_{\Sigma M}$ , мкм                           | 15<br>(20)                       | 15<br>(20) | 20<br>(30)                               | 20<br>(30)    | 30<br>(40)         | 30<br>(40)   |
| Допуск на кинематическую погрешность передачи $F_{к.п.}$ , мкм     | 116,3<br>(164,4)                 |            | 116,5<br>(166,7)                         |               | 109,4<br>(153,3)   |              |

В табл. 1 представлены значения допусков на показатели 6-й степени точности, а в скобках 7-й степени точности деталей зацепления (шестерни, колеса, червяка) и, соответственно, 6-й и 7-й степени точности кинематической погрешности передачи с делительными диаметрами шестерен 100 мм и колес 400 мм с модулем 3,5 мм. Значения погрешностей монтажа принимались по примерам ГОСТ 21098-82.

Допуски на кинематическую погрешность цилиндрических, конических и гипоидных зубчатых передач, представленные в табл. 1, практически совпадают (отличаются на 0,17–1,4 %). Допуски на кинематическую погрешность цилиндрических зубчатых и червячных передач отличаются на 5,9–6,8 %. В результате расчетов по формулам (1)–(3) и (6) для диапазонов размеров от 20 до 2000 мм и модулей до 10 мм зубчатых колес, а также для степеней точности 5–8 разница между значениями кинематической погрешности исследуемых механических передач не превышала 7 %.

#### Разработка математических зависимостей для расчета кинематической погрешности механических передач в сборе

Учитывая приведенные выше результаты сравнительного анализа стандартов, методов расчета и оценки точности зубчатых и червячных передач с незначительным отличием допусков на кинематическую погрешность исследуемых типов передач, для них предложены общие математические зависимости, методы и методики расчета кинематической погрешности передачи в сборе.

Для расчета общих допусков на кинематическую погрешность механической передачи в сборе (зубчатой и червячной) на основе представленного анализа ГОСТов, в качестве базового принят ГОСТ 1643-81 на допуски цилиндрических зубчатых передач, который является исходным для разработанных допусков на конические и ги-

поидные зубчатые, а также червячные передачи. Из ГОСТ 1643-81 к параметрам  $F_p$  и  $f_f$  добавлены допуски на циклические погрешности зубцовой частоты  $k$  для передачи  $f_{z_2}$  (по ведомому колесу с числом зубьев  $z_2$ ):  $f_{z_2}$  ( $k = z_2$ ),  $0,5f_{z_2}$  ( $k = 2z_2$ ),  $0,4f_{z_2}$  ( $k = 3z_2$ ),  $0,35f_{z_2}$  ( $k = 4z_2$ ), которые в значительной степени влияют на плавность работы передачи в сборе, а также погрешности монтажа шестерни и колеса  $E_{\Sigma M1}$  и  $E_{\Sigma M2}$ , которые влияют на кинематическую точность передачи. При этом накопленная погрешность колеса  $F_{pr2}$  характеризует в амплитудно-частотном спектре кинематической погрешности передачи гармоники с 1 по  $z_2/2$  (основные гармоники 1, 2, 3); накопленная погрешность шестерни  $F_{pr1}$  характеризует гармоники с 1 по  $z_2/2$ , умноженные на передаточное отношение  $u$  (основные гармоники  $u, 2u, 3u$ ). Погрешность профиля зуба  $f_{fr}$  может проявляться в гармонике с номером, равным числу зубьев, также, как и циклическая погрешность зубцовой частоты  $f_{z_2}$ , а также иметь частоты, кратные числу зубьев колеса (гармоники более высокой частоты, чем зубцовая частота). Показатель  $f_{z_2}$  характеризует жесткий контакт при вхождении зубьев в зацепление, что происходит в основном из-за погрешности шага и создает дополнительное колебание зубьев и угловое перемещение или дополнительное перемещение по дуге делительной окружности.

Исходя из представленного выше обоснования, выведена формула в векторном виде для расчета общего допуска для зубчатой и червячной передачи в сборе на кинематическую погрешность  $F_{к.п}$ :

$$\vec{F}_{к.п} = \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{f}_{f1} + \vec{f}_{f2} + \vec{f}_{z_2} + 0,5\vec{f}_{z_2} + 0,4\vec{f}_{z_2} + 0,35\vec{f}_{z_2} + \vec{E}_{\Sigma M1} + \vec{E}_{\Sigma M2}. \quad (7)$$

Кинематическую погрешность передачи в сборе можно рассчитывать, используя метод максимума-минимума с арифметическим суммированием допусков на показатели и вероятностный метод с геометрическим суммированием, основанный на законах относительного рассеяния параметров.

Формула для расчета общего допуска для зубчатой и червячной передачи в сборе на кинематическую погрешность методом максимума-минимума на основе формулы (7) имеет вид:

$$F_{к.п} = F_{p1} + F_{p2} + f_{f1} + f_{f2} + f_{z_2} + 0,5f_{z_2} + 0,4f_{z_2} + 0,35f_{z_2} + E_{\Sigma M1} + E_{\Sigma M2}. \quad (8)$$

При использовании метода максимума-минимума и вероятностного метода, геометрически суммировались только допуски на показатели, характеризующие низкочастотный и среднечастотный участки гармоник с близкими частотами в амплитудно-частотном спектре кинематической погрешности передачи. К таким показателям относятся  $F_{p1}$  и  $E_{\Sigma M1}$ ,  $F_{p2}$  и  $E_{\Sigma M2}$ . Показатели, характеризующие высокочастотный участок гармоник  $f_{z_2}$ ,  $0,5f_{z_2}$ ,  $0,4f_{z_2}$ ,  $0,35f_{z_2}$ ,  $f_{f1}$ ,  $f_{f2}$ , со значительной разницей частот суммировались арифметически. Тогда формула для расчета общего допуска для зубчатой и червячной передачи в сборе на кинематическую погрешность на основе формулы (7) с учетом коэффициентов относительного рассеяния случайных величин  $k_1$  и  $k_2$  имеет вид:

$$F_{к.п} = k_1 \sqrt{F_{p1}^2 + E_{\Sigma M1}^2} + k_2 \sqrt{F_{p2}^2 + E_{\Sigma M2}^2} + f_{z_2} + 0,5f_{z_2} + 0,4f_{z_2} + 0,35f_{z_2} + f_{f1} + f_{f2}. \quad (9)$$

В табл. 2 представлены рассчитанные по разработанным формулам (8) и (9) значения общих допусков для зубчатых и червячных передач в сборе на кинематическую погрешность для 5–10 степеней точности.

Таблица 2

**Допуски на кинематическую погрешность для зубчатых  
и червячных передач в сборе**

| Степень<br>точности | Делительный диаметр, мм                                    |              |              |              |              |               |                |
|---------------------|--|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|----------------|
|                     | 21–32  | 32–51        | 51–102       | 102–201      | 201–401      | 401–637       | 637–1019       |
|                     | Допуск на кинематическую погрешность передачи в сборе, мкм |              |              |              |              |               |                |
| 5                   | 65<br>(78)   | 68<br>(82)   | 79<br>(97)   | 97<br>(116)  | 123<br>(143) | 150<br>(178)  | 186<br>(215)   |
| 6                   | 91<br>(110)  | 96<br>(115)  | 112<br>(137) | 137<br>(164) | 173<br>(202) | 211<br>(252)  | 262<br>(303)   |
| 7                   | 129<br>(155)   | 136<br>(163) | 158<br>(194) | 194<br>(232) | 245<br>(285) | 299<br>(356)  | 371<br>(429)   |
| 8                   | 182<br>(219)   | 192<br>(231) | 223<br>(274) | 274<br>(328) | 346<br>(403) | 423<br>(503)  | 525<br>(607)   |
| 9                   | 258<br>(310)   | 272<br>(326) | 316<br>(388) | 388<br>(464) | 490<br>(570) | 598<br>(712)  | 742<br>(858)   |
| 10                  | 365<br>(438)   | 385<br>(461) | 447<br>(549) | 549<br>(656) | 693<br>(806) | 846<br>(1007) | 1049<br>(1213) |

В табл. 2 для каждой степени точности и каждого интервала делительных диаметров представлено два значения: верхнее значение рассчитано по формуле (9), нижнее значение в скобках рассчитано по формуле (8), коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  принимались равными единице. При расчете общих допусков на кинематическую погрешность исследуемых передач в сборе за исходную (базовую) принималась 7-я степень точности с допусками на показатели для интервалов делительных диаметров ведомых колес из ГОСТ 1643-81, при этом значения допусков на показатели точности ведущих шестерен принимались на 20 % меньше. При расчете допусков для других степеней точности для перехода между степенями от исходной 7-й степени использовался коэффициент  $\sqrt{2}$ , такой же как в стандартах ISO.

**Экспериментальная оценка кинематической погрешности планетарной передачи с промежуточными телами качения**

Для оценки точности планетарных передач с промежуточными телами качения и сравнения с точностью зубчатых и червячных передач и допусками на кинематическую погрешность, рассчитанными по приведенным выше математическим зависимостям, использовались одноступенчатые планетарные передачи с промежуточными телами качения с шариковым зацеплением.

На рис. 1 представлена модель одноступенчатой планетарной передачи с промежуточными телами качения, разработанная на основе [13].

Передача (рис. 1) состоит: из ведущего звена, включающего ведущий вал 1, эксцентрик 2 и подшипник 4, создающий ведущую беговую дорожку; неподвижного звена в виде кольца 6 с волнообразной многопериодной беговой дорожкой; ведомого звена, представляющего ведомый вал 3, сателлиты-шарики 5, размещенные в отверстиях водила 7. При вращении ведущего звена сателлиты-шарики 5 катятся по под-

шипнику 4 и волнообразной многопериодной беговой дорожке кольца 6, воздействуя при этом на водило 7 и ведомый вал 3. Эти передачи являются малогабаритными и наиболее технологичными в сравнении с зубчатыми передачами. Их проектируют как одноступенчатые, так и многоступенчатые механизмы с передаточным отношением в одной ступени от 5 до 30, что позволяет получать большие передаточные отношения всего механизма, которые могут значительно превышать передаточные отношения зубчатых передач.

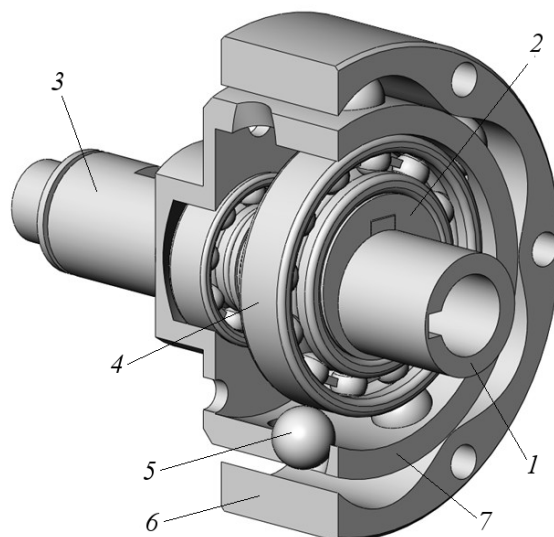


Рис. 1. Планетарная передача с промежуточными телами качения

Так как для планетарных передач с промежуточными телами качения, в отличие от зубчатых передач, не разработаны стандарты, представляющие систему допусков на изготовление и контроль, то наиболее значимым комплексным показателем точности, характеризующим качество изготовления всего механизма в сборе, для этих передач является кинематическая погрешность. Для оценки точности изготовления планетарных передач с промежуточными телами качения и сравнения точности этих передач со степенями точности зубчатых передач в сборе проведены экспериментальные исследования кинематической погрешности планетарных редукторов с промежуточными телами качения с разными передаточными отношениями на специализированном стенде [13, 14]. На рис. 2 показан стенд для контроля кинематических параметров механических передач.

На стенде (рис. 2) при вращении вала электродвигателя 2, соединенного муфтой 3 с ведущим валом редуктора 4, вращение передается на ведомый вал редуктора, а также через муфту 5 и вал электромагнитного тормоза 6 на датчик угла поворота 7, который формирует импульсные сигналы в виде значений напряжений за период времени полного поворота ведомого вала редуктора, передает их на аналого-цифровой преобразователь 1 и ПЭВМ. С помощью разработанного программного обеспечения импульсные сигналы преобразуются в действительные углы поворота ведомого вала редуктора, которые сравниваются с номинальными углами поворота, соответствующими дискретности датчика 7. Разность между каждым действительным и номинальным углом поворота ведомого вала редуктора составляет его кинематическую погрешность.

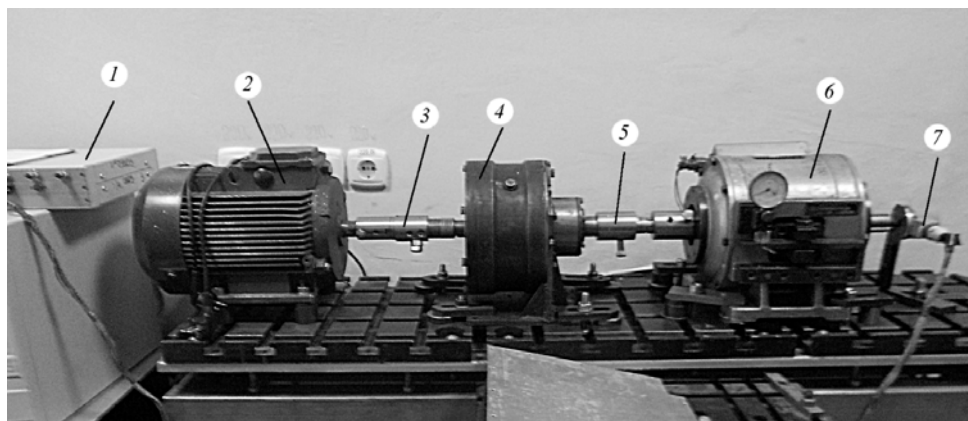


Рис. 2. Стенд для контроля кинематических параметров механических передач:  
 1 – аналого-цифровой преобразователь; 2 – электродвигатель; 3 – муфта на ведущем валу редуктора; 4 – испытуемый редуктор; 5 – муфта на ведомом валу редуктора; 6 – электромагнитный тормоз; 7 – датчик угла поворота

На рис. 3 представлен график кинематической погрешности  $F_i(\varphi)$  в зависимости от угла поворота  $\varphi$  планетарного редуктора с промежуточными телами качения, полученный при измерениях на стенде с частотой вращения ведущего вала 750 об/мин и нагружающим моментом на ведомом валу редуктора 20 Нм для выборки зазоров. Передаточное отношение редуктора равно семи,  $n$  – число значений кинематической погрешности, полученных при измерении на стенде. Детали зацепления редуктора и их сборка выполнены со средней экономической точностью. Наиболее ответственная рабочая поверхность беговой дорожки, которая контактирует с сателлитами, обработана фрезерованием.

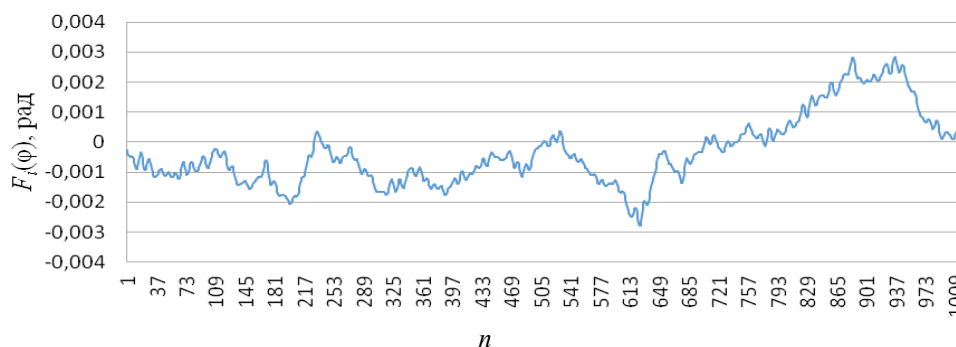


Рис. 3. График кинематической погрешности планетарного редуктора с промежуточными телами качения

На графике (рис. 3) кинематическая погрешность редуктора составила 0,0056 радиан (19,4 угловые минуты). При приведении угловых величин к среднему радиусу беговой дорожки (аналог радиуса делительной окружности зубчатого колеса), равному 41,5 мм, кинематическая погрешность составила 232,4 мкм, что для интервала 51–102 мм в табл. 2 приблизительно соответствует 8-й степени точности в сравнении с зубчатыми передачами в сборе.

#### Анализ точности планетарных передач с промежуточными телами качения

Чтобы определить погрешности изготовления и сборки деталей редуктора, которые в наибольшей степени влияют на кинематическую погрешность, с целью последующего установления допусков на изготовление этих деталей, проводился спек-

тральный анализ кинематической погрешности, полученной при измерениях на стенде. Для построения амплитудно-частотного спектра кинематической погрешности использовались математические зависимости [15–19]:

$$a_k = (2/n) \sum_{i=1}^n F_i(\varphi) \cos(k\varphi); \quad (10)$$

$$b_k = (2/n) \sum_{i=1}^n F_i(\varphi) \sin(k\varphi); \quad (11)$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad (12)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  – коэффициенты ряда Фурье;  $n$  – число значений кинематической погрешности;  $F_i(\varphi)$  – значение кинематической погрешности в зависимости от угла поворота ведомого вала редуктора;  $\varphi$  – угол поворота ведомого вала редуктора;  $k$  – номер гармонической составляющей;  $c_k$  – амплитуда  $k$ -й гармонической составляющей;  $\varphi_k$  – угол фазового смещения  $k$ -й гармонической составляющей.

На основе формул (10)–(12) разработана компьютерная программа на языке VBA в Excel, с помощью которой был рассчитан и построен амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рис. 3. График амплитудно-частотного спектра показан на рис. 4.

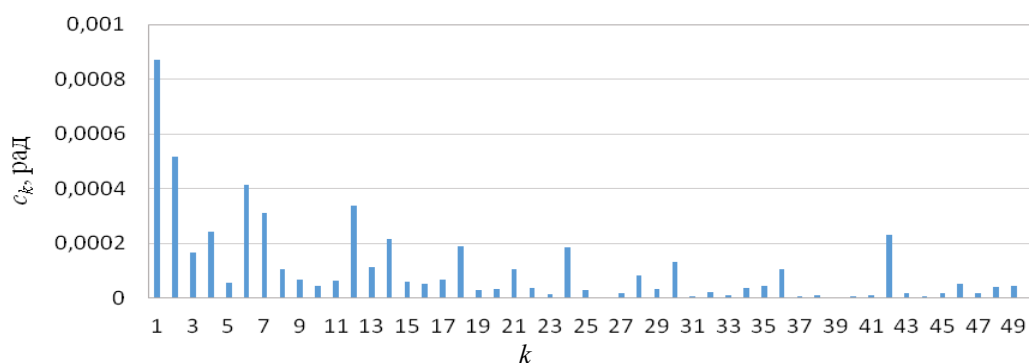


Рис. 4. Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности планетарного редуктора с промежуточными телами качения

В спектре наибольшие амплитуды имеют гармонические составляющие (гармоники) с номерами 1, 2, 6, 7, 12, 14, 18, 24, 42. Гармоники с номерами 1 и 2 характеризуют радиальные погрешности изготовления и сборки ведомого вала, водила и кольца с многопериодной беговой дорожкой. Эти погрешности вызывают радиальное и торцовое биение деталей зацепления и монтажа ведомого звена, по аналогии с биениями зубчатых колес и погрешностями монтажа зубчатых передач. Гармоника 6 и кратные ей гармоники 12, 18, 24 и 42 характеризуют отклонения шага и профиля беговой многопериодной дорожки редуктора с числом периодов, равным шести. Эти погрешности можно сравнить с погрешностями шага и зубцовой частоты зубчатых передач, с гармониками, равными и кратными числу зубьев ведомого колеса. Гармоника 7, равная передаточному отношению, и кратные ей гармоники 14 и 42 характеризуют радиальные биения ведущего звена из-за погрешностей изготовления и сборки ведущего вала и эксцентрика. Погрешности и номера гармоник, связанные с передаточным отношением, проявляются и для зубчатых передач.

Зависимости, установленные для редуктора с передаточным отношением, равным семи, были подтверждены и для редукторов с другими передаточными отношениями: 11, 14, 25, 49. Для всех этих испытанных редукторов наиболее значимыми были также гармоники с номерами 1, 2 и номерами, соответствующими числу периодов беговых дорожек и передаточному отношению. Значения измеренной на стенде кинематической погрешности редукторов находились в пределах допусков 8–10 степени точности, представленных в табл. 2. В этих редукторах при изготовлении многопериодных беговых дорожек использовалась только фрезерная обработка без отделочных операций. При обработке зубчатых колес фрезерованием зубьев также можно получить 8–10 степень точности передачи.

Таким образом, точность изготовления планетарных передач с промежуточными телами качения можно оценивать по комплексному показателю – кинематической погрешности и ее амплитудно-частотному спектру, сравнивать ее со степенями точности зубчатых передач в сборе и использовать единые допуски на кинематическую погрешность для этих передач.

### **Заключение**

В результате исследований разработана методика расчета и проведен сравнительный анализ кинематической погрешности зубчатых цилиндрических, конических и червячных передач. Для этих передач рассчитаны допуски на кинематическую погрешность и показано незначительное их отличие, не превышающее 7 %.

Разработаны математические зависимости для расчета кинематической погрешности исследуемых механических передач в сборе. Предложены общие формулы, методы и методики расчета кинематической погрешности зубчатых и червячных передач в сборе. В разработанных формулах введены допуски на циклические погрешности зубцовой частоты и погрешности монтажа, которые в значительной степени влияют на плавность работы передачи и ее кинематическую точность.

Получен график кинематической погрешности планетарного редуктора с промежуточными телами качения при измерениях на стенде. Кинематическая погрешность редуктора, детали которого изготовлены и собраны со средней экономической точностью, составила 0,0056 радиан (232,4 мкм при приведении к среднему радиусу беговой дорожки), что соответствует 8-й степени точности в проведенном сравнении с зубчатыми передачами в сборе.

Получен амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности планетарного редуктора с промежуточными телами качения и проведен его анализ. Результаты анализа позволили установить наиболее значимые гармонические составляющие кинематической погрешности, а также соответствие номеров значимых гармонических составляющих числу периодов беговых дорожек и передаточному отношению редуктора. Это дает возможность определять погрешности изготовления и сборки деталей планетарных редукторов с промежуточными телами качения, проводить оценку их точности по наиболее значимым гармоническим составляющим и сравнивать амплитуды наиболее значимых гармонических составляющих этих передач с зубчатыми передачами.

На основе проведенных исследований сделан вывод о возможности назначать при проектировании и использовать при изготовлении и контроле единые допуски на кинематическую погрешность для зубчатых и червячных передач в сборе, а также для планетарных передач с промежуточными телами качения, что упрощает конструкторское и технологическое проектирование и позволяет применять единые методы контроля на специализированных стендах.

## Литература

1. Капитонов, А. В. Расчет и компьютерное моделирование напряжений и деформаций планетарных шариковых и роликовых передач / А. В. Капитонов // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2024. – Т. 133, № 1. – С. 120–124. – DOI 10.36773/1818-1112-2024-133-1-120-124
2. Jiang, N. Transmission Efficiency of Cycloid-Pinion System Considering the Assembly Dimensional Chain / N. Jiang // Applied Sciences. – 2022. – Vol. 12, N 23. – P. 11917. – DOI 10.3390/app122311917
3. Тимофеев, Б. П. Метод повышения точности мелко модульных зубчатых передач при сборке / Б. П. Тимофеев // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2019. – Т. 62, № 10. – С. 941–946. – DOI 10.17586/0021-3454-2019-62-10-941-946
4. Pabiszczak, S. Effect of Manufacturing Errors on the Operation of the Eccentric Rolling Transmission / S. Pabiszczak // Advances in Science and Technology-Research Journal. – 2020. – Vol. 14, N 3. – P. 213–222. – DOI 10.12913/22998624/122604
5. LiXin, X. Dynamic modeling and contact analysis of a cycloid-pin gear mechanism with a turning arm cylindrical roller bearing / X. LiXin, Y. YuHu // Mechanism and Machine Theory. – 2016. – Vol. 104. – P. 327–349. – DOI 10.1016/j.mechmachtheory.2016.06.018
6. Ken-Shin, L. Kinematic error analysis and tolerance allocation of cycloidal gear reducers / L. Ken-Shin, C. Kuei-Yuan, L. Jyh-Jone // Mechanism and Machine Theory. – 2018. – Vol. 124. – P. 73–91. – DOI 10.1016/j.mechmachtheory.2017.12.028
7. Yunhong, M. Mathematical modeling of the transmission performance of 2K–H pin cycloid planetary mechanism / M. Yunhong, W. Changlin, L. Liping // Mechanism and Machine Theory. – 2007. – Vol. 42, N 7. – P. 776–790. – DOI 10.1016/j.mechmachtheory.2006.07.003
8. Linshan, H. Global sensitivity analysis of transmission accuracy for RV-type cycloid-pin drive / H. Linshan, G. Fei // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2016. – Vol. 30, № 3. – P. 1225–1231. – DOI 10.1007/s12206-016-0226-2
9. Капитонов, А. В. Повышение КПД шариковых и роликовых передач путем оптимизации геометрических параметров деталей зацепления / А. В. Капитонов // Транспортное машиностроение. – 2024. – Т. 27, № 3. – С. 20–30. – DOI 10.30987/2782-5957-2024-3-20-30
10. Технология производства и методы обеспечения качества зубчатых колес и передач : учеб. пособие для машиностроительных специальностей вузов / В. Е. Антонюк, М. М. Кане, В. Е. Старжинский ; под общ. ред. В. Е. Старжинского, М. М. Кане. – Минск : Технопринт, 2003. – 765 с.
11. Старжинский, В. Е. Белорусская научная школа. Зубчатые передачи / В. Е. Старжинский, С. В. Шилько, Н. Н. Ишин // Механика машин, механизмов и материалов. – 2025. – Т. 70, № 1. – С. 80–83. – DOI 10.46864/1995-0470-2025-1-70-80-83
12. Антонюк, В. Е. Зубчатые передачи. Нормативно-методическое обеспечение точности зубчатых передач на этапе проектирования / В. Е. Антонюк, В. Л. Басинюк, П. С. Серенков. – Минск : Беларус. навука, 2016. – 252 с.
13. Капитонов, А. В. Точность и контроль малогабаритных планетарных механизмов: монография / А. В. Капитонов. – Могилев : Беларус.-Рос. ун-т, 2021. – 160 с.
14. Капитонов, А. В. Устройство и способ фильтрации сигналов для контроля комплексных показателей точности механических передач / А. В. Капитонов, О. А. Капитонов // Актуальные вопросы машиноведения : сб. науч. тр. / Объедин. ин-т машиностроения Нац. акад. наук Беларуси. – Минск, 2025. – Т. 14. – С. 94–98.
15. Капитонов, А. В. Метод повышения точности планетарных передач на основе спектрального анализа экспериментальной оценки и математического моделирования кинематических погрешностей / А. В. Капитонов, В. С. Дроздов // Materials and Technologies. – 2025. – Т. 15, № 1. – С. 29–39. – DOI 10.24412/2617-149X-2025-1-29-39

16. Юнаковский, А. Д. Гармонический анализ. Ряды Фурье, преобразование Фурье и приложения БПФ / А. Д. Юнаковский. – М. : ИД Интеллект, 2024. – 263 с.
17. Васильев, С. Н. Гармонический анализ / С. Н. Васильев, В. Т. Шевалдин. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 79 с.
18. Макушев, Ю. П. Гармонический анализ крутящего момента двигателя ЯМЗ-5340 / Ю. П. Макушев, Т. А. Полякова // Омский научный вестник. – 2024. – Т. 191, № 3. – С. 39–47. – DOI 10.25206/1813-8225-2024-191-39-47
19. Матущенко, А. Е. Уравновешивание эллиптических гармоник инерционной нагрузки плоских механизмов / А. Е. Матущенко, М. Д. Сарксян // Известия Оренбургского аграрного государственного университета. – 2023. – Т. 99, № 1. – С. 88–91.

### References

1. Kapitonov A. V. Calculation and computer modeling of stresses and deformations of planetary ball and roller gears. *Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Vestnik of Brest State Technical University*, 2024, vol. 133, no. 1, pp. 120–124 (in Russian). <https://doi.org/10.36773/1818-1112-2024-133-1-120-124>
2. Jiang N. Transmission Efficiency of Cycloid-Pinion System Considering the Assembly Dimensional Chain. *Applied Sciences*, 2022, vol. 12, no. 23, art. 11917. <https://doi.org/10.3390/app122311917>
3. Timofeev B. P. Method for increasing the accuracy of fine-module gears during assembly. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Priborostroenie = Journal of Instrument Engineering*, 2019, vol. 62, no. 10, pp. 941–946 (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2019-62-10-941-946>
4. Pabiszczak S. Effect of Manufacturing Errors on the Operation of the Eccentric Rolling Transmission. *Advances in Science and Technology-Research Journal*, 2020, vol. 14, no. 3, pp. 213–222. <https://doi.org/10.12913/22998624/122604>
5. LiXin X., YuHu Y. Dynamic modeling and contact analysis of a cycloid-pin gear mechanism with a turning arm cylindrical roller bearing. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, vol. 104, pp. 327–349. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.06.018>
6. Ken-Shin L., Kuei-Yuan C., Jyh-Jone L. Kinematic error analysis and tolerance allocation of cycloidal gear reducers. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, vol. 124, pp. 73–91. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.12.028>
7. Yunhong M., Changlin W., Liping L. Mathematical modeling of the transmission performance of 2K–H pin cycloid planetary mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, 2007, vol. 42, no. 7, pp. 776–790. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2006.07.003>
8. Linshan H., Fei G. Global sensitivity analysis of transmission accuracy for RV-type cycloid-pin drive. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2016, vol. 30, no. 3, pp. 1225–1231. <https://doi.org/10.1007/s12206-016-0226-2>
9. Kapitonov A. V. Increasing the efficiency of ball and roller transmissions by optimizing the geometric parameters of the engagement parts. *Transportnoe mashinostroenie*, 2024, vol. 27, no. 3, pp. 20–30 (in Russian). <https://doi.org/10.30987/2782-5957-2024-3-20-30>
10. Antonyuk V. E., Kane M. M., Starzhinskii V. E. *Production technology and methods for ensuring the quality of gears and gears*. Ed. Starzhinskogo V. E., Kane M. M. Minsk, Tekhnoprint Publ., 2003. 765 p. (in Russian).
11. Starzhinskii V. E., Shil'ko S. V., Ishin N. N. Belarusian scientific school. Gear drives. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov = Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*, 2025, vol. 70, no. 1, pp. 80–83 (in Russian). <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-1-70-80-83>
12. Antonyuk V. E., Basinyuk V. L., Serenkov P. S. *Gears. Regulatory and methodological support for gear accuracy at the design stage*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2016. 252 p. (in Russian).

13. Kapitonov A. V. *Precision and control of small planetary gears*. Mogilev, Belorussko-Rossiiskii universitet, 2021. 177 p. (in Russian).
14. Kapitonov A. V., Kapitonov O. A. Device and method for filtering signals for monitoring complex precision indicators of mechanical transmissions. *Aktual'nye voprosy mashinovedeniya: sb. nauch. trudov* [Current issues in mechanical engineering: collection of scientific papers]. Minsk, Ob'edinennyj institut mashinostroeniya Nacional'noj akademii nauk Belarusi, 2025, vol. 14, pp. 94–98 (in Russian).
15. Kapitonov A. V., Drozdov V. S. A method for improving the accuracy of planetary gears based on spectral analysis of experimental evaluation and mathematical modeling of kinematic errors. *Materials and Technologies*, 2025, vol. 15, no. 1, pp. 29–39 (in Russian). <https://doi.org/10.24412/2617-149X-2025-1-29-39>
16. Yunakovskii A. D. *Harmonic Analysis: Fourier Series, Fourier Transform, and FFT Applications*. Moscow, ID Intellect Publ., 2024. 263 p. (in Russian).
17. Vasil'ev S. N., Shevaldin V. T. *Harmonic analysis*. Ekaterinburg, Izdatel'stvo Ural'skogo universiteta Publ., 2014. 79 p. (in Russian).
18. Makushev Yu. P., Polyakova T. A. Harmonic analysis of the torque of the YaMZ-5340 engine. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin*, 2024, vol. 191, no. 3, pp. 39–47 (in Russian). <https://doi.org/10.25206/1813-8225-2024-191-39-47>
19. Matushchenko A. E., Sarksyun M. D. Balancing elliptical harmonics of inertial load of flat mechanisms. *Orenburgskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*, 2023, vol. 99, no. 1, pp. 88–91 (in Russian).

Поступила 17.12.2025 г.