

УДК 531(091)

Д. В. КОМНАТНЫЙ

*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,
Гомель, Беларусь*

КРАТКИЙ АНАЛИЗ ТРАКТАТА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ «ФОРОНОМИЯ» Я. GERMANA

Выполнены краткое описание и анализ трактата по теоретической механике «Форономия» Якоба Германа. Выявлено влияние этого труда на дальнейшее развитие теоретической механики в трудах Л. Эйлера и Д. Бернулли. Проанализированы поставленные в трактате задачи и полученные результаты, являющиеся вкладом Я. Германа в создание современной теоретической механики. Указаны возможности использования материалов «Форономии» в учебном процессе современных вузов.

Ключевые слова: история теоретической механики, принцип Германа – Даламбера, Петербургская академия наук, преподавание теоретической механики.

Имя швейцарского математика и механика Якоба Германа (1678–1733) для специалистов по теоретической механике связано с созданием базового принципа кинестатики: принципом Германа – Даламбера.

Принцип уравнивания движущих сил, сил инерции и реакций связи Я. Герман высказал в своем главном труде по механике «Форономия» (Phoronomia), изданном в 1716 г. в Амстердаме на латинском языке. Ученый применил этот принцип для решения задачи о колебаниях составного маятника в виде невесомого стержня, несущего несколько материальных точек [1]. Тем самым трактат Я. Германа представляет существенный интерес для истории механики. Тем более это справедливо, так как «Форономия» является вторым обобщающим трудом по теоретической механике после основополагающих «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона. Долгое время трактат оставался единственным сочинением, где эта наука излагалась, как самостоятельная дисциплина [2]. Значительно влияние «Форономии» на творчество Л. Эйлера. Эйлер отзывался о книге Я. Германа как о блестящем сочинении, обогатившем учение о движении. Вместе с тем он отмечал, что изучение «Начал» Ньютона и «Форономии» Германа побудило его начать работу по изложению теоретической механики средствами математического анализа [2, 3].

Немаловажным обстоятельством, усиливающим интерес к творчеству Я. Германа, является и то, что в 1722 г. он был приглашен в состав Петербургской Академии наук. Приглашение поступило от имени Петра I по рекомендации крупного философа-лейбницианца Х. Вольфа. В 1725 г. Якоб Герман первым принял на себя обязанности академика. На этом посту Герман работал весьма активно и опубликовал в «Комментариях Петербург-

ской Академии наук» пятнадцать статей. Большею частью они посвящены математическому анализу и геометрии, но несколько работ – механике: о фигуре Земли, о мере движения – живой силе, о движении тел в сопротивляющейся среде, о колебаниях маятника, о движении двух тел, связанных нитью [1–3].

К сожалению, в 1731 г. ссоры с всесильным советником академической канцелярии И. Д. Шумахером нарушили плодотворную работу Я. Германа в России. Он был вынужден уехать в Базель, получив звание почетного члена Петербургской академии наук [4]. Несмотря на это, Я. Герман успел внести значительный вклад в создание российской науки.

Из всего сказанного следует, что творчество Я. Германа заслуживает глубокого изучения. К сожалению, содержание «Форономии», полученные в ней результаты и примененные методы остались практически не описанными и системно не исследованными. В настоящей статье предпринята попытка заполнить такой досадный пробел и дать краткий анализ этого, в свое время очень известного, труда.

«Форономия» состоит из двух книг, первая из которых посвящена статике и динамике, вторая – гидромеханике. Несомненно, на выбор структуры книги повлияло построение «Начал» И. Ньютона. Так как Герман получил математическую подготовку в Базеле у Я. Бернулли, то являлся последователем школы Г.-В. Лейбница [3]. Однако Я. Герман хорошо знал и использовал при работе над «Форономией» результаты И. Ньютона, Х. Гюйгенса, П. Вариньона, так же как результаты Якоба и Иоганна Бернулли.

В основу механики Я. Герман положил синтетико-геометрический метод с инфинитезимальными соображениями. Эта особенность рассматриваемого труда существенно затрудняет его понимание и интерпретацию полученных результатов.

Во *введении* к трактату даны определения основных понятий: движение, пространство, время, сила, скорость. Из текста введения ясно, что в понимании пространства и времени Я. Герман следовал И. Ньютону, а в понимании сил – Лейбницу и его учению о мертвых и живых силах. Определение скорости у Германа как результата деления пути на время имеет прогрессивный для его времени характер. Понимание сил инерции у Германа совпадает с учением И. Ньютона. Масса тела понимается Германом в духе современной ему науки как количество материи или сумма корпускул, составляющих данное тело. Так как в математике эпохи Германа отсутствовали векторы, то Герман вводит особое понятие направления силы. Во введении можно найти формулировку третьего закона Ньютона.

Первая книга «Форономии» состоит из двух частей. Первая часть содержит три главы и посвящена статике. Вторая часть включает шесть глав и посвящена динамике.

В *первой главе* книги первой рассматривается понятие силы тяжести, но при этом ускорение силы тяжести g не выявляется. В *второй главе* описывается способ задания сил. Отсутствие векторов заставляет Германа изображать силы отрезками, направление которых совпадает с направлением действия силы. Эта идея позднее позволила ввести понятие вектора. Далее дается определение равновесия сил на основе многих опытов, выполненных ранее П. Вариньоном. Затем Герман приводит доказательство правила параллелограмма сложения сил. Такие доказательства приводились многими авторами впоследствии, так как вопрос о том, является ли правило параллелограмма теоремой или его следует принять за аксиому, оставался открытым вплоть до начала XX в. Далее следует доказательство теоремы Вариньона.

Затем Герман переходит к рассмотрению равновесия рычага под действием параллельных сил, направленных перпендикулярно рычагу, и обосновывает правило моментов. Далее рассматривается метод Гульдена для вычисления объемов тел. Потом рассматривается равновесие рычага под действием произвольно направленных сил. При этом осуществляется разложение сил на составляющие, аналогично треугольнику сил, и формулируются условия равновесия. Полученные условия переносятся на рычаги в форме произвольных кривых. В конце второй главы рассматривается равновесие поверхностей под действием распределенных сил и давления. Результаты представлены в сложной геометрической форме. В *главе третьей* Герман ставит и геометрически решает задачу о равновесии гибкой нити под действием произвольно направленных сил. Как частный случай им получены решения задач об эластике и о цепной линии.

В *первой главе* части второй рассматривается движение материальных точек по кривым линиям. При этом Герман вводит нормальную и касательную составляющие силы тяжести. Очевидно, эта идея оказала влияние на творчество Л. Эйлера. Также вводится понятие ускоряющего и замедляющего действий силы тяжести. Формулируется второй закон Ньютона в конечных величинах $F = m \frac{v}{t} = ma$ и в дифференциальной форме $F = m \frac{dv}{dt}$. Также второй закон Ньютона записывается в проекции на касательную к траектории $\vec{F}_\tau = m \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$. Доказывается теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме $F ds = m v dv$. Доказательство проведено геометрически с громоздким чертежом. Затем доказана теорема о независимости скорости от пути при движении под действием силы тяжести. Формулируется закон сохранения механической энергии в форме, имеющейся у Торричелли и Гюйгенса: материальная точка при восходящем движении получает ту же скорость, которую потеряла при падении. Высказано положение

ние, соответствующее принципу эквивалентности гравитационной и инертной масс. И в завершение приводятся кинематические соотношения

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad gdx = vdv, \quad v^2 = 2gs, \quad t = \frac{2h}{v}, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Заметно, что подход Я. Германа к изложению основных законов динамики весьма близок современному.

Вторая глава содержит разделы о вычислении нормальной составляющей центральной силы и момента количества движения, о втором законе Кеплера на основании предложения 1 книги 1 «Начал» Ньютона. Доказывается, что траектория материальной точки в поле тяготения – коническое сечение. Поставлена и решена задача: по диаграмме силы и данной начальной скорости найти траекторию материальной точки. Решение основано на работах И. Ньютона, П. Вариньона и И. Бернулли. Поставлена и решена обратная задача: по графической диаграмме силы притяжения найти ее зависимость от расстояния. В завершение главы Герман показывает, что его решение применимо в случае обратно пропорциональной кубу расстояния силы притяжения, которую рассматривали ранее И. Ньютон и И. Бернулли.

Третья глава посвящена различным задачам механики. В ней исследуются изохронные кривые при движении под действием графически заданной силы притяжения к центру и под действием силы тяжести. В частности, изложен результат Х. Гюйгенса: таутохроной при движении под действием силы тяжести является циклоида. Далее рассмотрен конический маятник и кривые равного давления. В современной терминологии это кривые, при движении по которым материальной точки сила реакции связи кривой остается постоянной во всех точках кривой. Такие кривые рассматривали И. Бернулли и Г. Фр. Лопиталь. Впоследствии обобщением этих кривых стали кривые Рибокура [5].

Четвертая глава содержит задачу о движении перигитров эллиптических орбит (например, перигелия и афелия Земли). Герман выводит отношение между силой тяготения, создающей орбиту с подвижными перигитрами, и силой тяготения в случае неподвижной орбиты и сравнивает свое решение с решениями И. Ньютона и Д. Грегори.

В *пятой главе* рассматриваются колебания составного маятника. Именно в этой главе высказана идея об уравнивании сил инерции и сил тяжести, развитием которой явились «петербургский принцип» и принцип Германа – Даламбера. В результате решения задачи Герман получает выражение для длины простого маятника, изохронного с составным. Для усложнения задачи Герман рассмотрел колебания составного маятника, грузы которого имеют разную плотность при одинаковом объеме и погружены в жидкость. Тогда на грузы действует сила Архимеда, а сила сопротивления среды Германом не учитывается. Поэтому постановка задачи является чисто академи-

ческой. Тем не менее Герман показывает справедливость для такой колебательной системы закона сохранения механической энергии, в форме, указанной Гюйгенсом. Также Герман сравнивает свои результаты с решением аналогичной задачи у И. Бернулли.

Шестая глава содержит теорию удара. Эта теория излагается по Гюйгенсу на основании закона сохранения механической энергии. При рассмотрении удара неупругих тел применяется закон сохранения количества движения по Валлису. Основное внимание Герман уделяет расчету движения центра тяжести соударяющихся тел. Но им вычисляются и послеударные скорости упругих тел. Представляет интерес данный Германом анализ последовательного удара трех и четырех неупругих тел.

Книга вторая «Форономии» разделена на четыре части, но главы нумеруются последовательно по всей книге.

Глава первая книги второй содержит определения основных понятий механики жидкости. Затем рассматриваются силы реакции опоры и условия равновесия жидкости в сосуде. В конце главы описаны гидростатическое давление и способ графического задания плотности и давления жидкости.

Вторая глава рассматривает давление жидкости на стенки сосуда. Результаты выражены в архаической форме: вес жидкости, действующей на поверхность, сравнивается с весом некоторого столба воды. Высказывается положение о зависимости давления в трубе от ее размеров и допустимого давления. Но расчет Германа занижает давление в два раза по сравнению с современной формулой Барлоу. Также Герман предпринял попытку рассматривать деформации стенки сосудов под давлением.

Третья глава посвящена равновесию тел, плавающих в воде. Рассмотрены задача о погружении на заданную глубину шара с полостью, задача о равновесии стержня, погруженного в жидкость и удерживаемого нитью, о равновесии треугольной призмы.

Четвертая глава рассматривает возможную форму, которую принимает стенка сосудов под давлением. В частности рассмотрены деформация стенок вертикальной цилиндрической трубы и полотна парусины под действием неоднородной жидкости. Давление жидкости задается графически.

В *пятой главе* описываются барометры, а в *шестой* – вакуумные насосы. Эти главы имеют более прикладное значение.

В *седьмой главе* анализируются упругость и давление воздуха. Причем Герман использует представление о воздухе как совокупности гигантского числа молекул. В дальнейшем эти молекулярно-кинетические представления развил Д. Бернулли в «Гидродинамике».

Глава восьмая посвящена изучению свойств изотермической атмосферы и ее изменений с высотой. При этом введена умозрительная зависимость между давлением и плотностью воздуха. Тем не менее в главе 8 путем геометрических построений получена барометрическая формула. Поставлена и

решена задача: по графику высот и показаниям ртутного барометра построить диаграммы давления и плотности атмосферы в зависимости от высоты.

В *главе девятой* рассматривается истечение жидкостей из сосудов. Для решения задач применяются уравнение непрерывности и формула Торричелли, выраженные в форме пропорций. Результаты представлены в геометрической форме, поэтому они трудно сопоставимы с современными. В *десятой главе* изучается течение жидкости в наклонном канале. Герман наряду с уравнением непрерывности использует соотношение между скоростью, силой тяжести и гидравлическим сопротивлением. Это соотношение, хотя и недостаточно адекватное, является первой попыткой сформулировать закон Бернулли. Окончательный вывод закона дал Д. Бернулли в «Гидродинамике».

В *главе одиннадцатой* рассмотрено обтекание прямоугольной пластинки потоком жидкости. Результаты Германа, полученные в этой главе, не представляют интереса, так как он не мог решить задачу без использования конформных преобразований.

В *главе двенадцатой* рассмотрены силы сопротивления движению тел в жидкости. Изучено сопротивление движению треугольника и конуса. Разобраны задачи о конусе наименьшего сопротивления и о теле вращения наименьшего сопротивления. Решение последней задачи сравнивается с решением И. Бернулли, а о решении И. Ньютона не упоминается. Далее рассматривается сопротивление движению тел, сечение которых плоскостью, проходящей через ось вращения, имеет сложную форму и может быть описано соединенными отрезками тех или иных кривых. При этом тело движется в жидкости поступательно по прямой, расположенной под углом к оси вращения. Решение этой задачи представлено геометрически.

Тринадцатая глава посвящена задаче о парусной кривой (кривой, описывающей сечение паруса, раздутого ветром). Решение дается в геометрической форме, поэтому оно громоздко. Ему предпосланы две весьма объемные леммы.

С *главы четырнадцатой* начинается рассмотрение движения тел под действием сил тяжести и сопротивления. В начале главы приведена теорема об изменении кинетической энергии при действии указанных сил. Затем осуществлено исследование логарифмических кривых, которые применяются для дальнейших исследований.

В *главе пятнадцатой* рассматривается движение материальной точки при сопротивлении, пропорциональном первой степени скорости. Рассмотрены движение под действием только этой силы по прямой, падение тела под действием сил тяжести и сопротивления, рассчитана траектория тела, брошенного под углом к горизонту в среде. Результат решения последней задачи сравнивается с решениями И. Ньютона и Х. Гюйгенса и доказываются, что все три решения совпадают по существу.

В *шестнадцатой главе* рассмотрено движение тел под действием силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости. Рассмотрены задачи о

движении материальной точки по прямой, и о максимальном подъеме материальной точки, брошенной вертикально вверх.

Глава семнадцатая содержит задачи о движении материальной точки под действием силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости, и силы вязкого трения. Изучено движение по прямой и падение по вертикальной прямой. Для последнего случая найдено максимальное расстояние, пройденной материальной точкой до остановки.

В *главе восемнадцатой* решается задача о движении материальной точки в воздухе изменяющейся плотности и при произвольном законе сопротивления. В частном случае рассматривается движение вертикально вверх. При этом решение проведено аналитически на основе теоремы об изменении кинетической энергии. Эти разделы «Форономии» рассматривают задачи, долгое время остававшиеся основными для сочинений по механике [6]. Несомненно, они оказали влияние на творчество Л. Эйлера.

В *главе девятнадцатой* решается задача о движении материальной точки по кривой в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости, под действием силы тяжести. В частном случае рассматриваются траектории в виде прямой и циклоиды. В последнем случае решение Германа совпадает с решением Ньютона, опубликованном в «Началах», однако имеет трудно понимаемую геометрическую форму.

В *двадцатой главе* рассмотрено движение по кривой, при котором на материальную точку действует сила притяжения, направленная по касательной к кривой в каждой точке, и сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости. Представлено длинное геометрическое решение.

Глава двадцать первая посвящена динамике парусного судна. Принимается, что на судно действует сила давления ветра на парус, пропорциональная относительной скорости ветра и судна. Парус поставлен под углом к ветру. К сожалению, Герман не учел аэродинамический профиль паруса, а сопротивление движению судна принял крайне неясным образом. Поэтому его решение недостаточно точное и имеет громоздкую геометрическую форму.

В *двадцать второй главе* излагаются результаты И. Ньютона об определении формы Земли из гидростатических начал, а также выводится форма поверхности жидкости, образовавшейся во вращающемся цилиндрическом сосуде.

Двадцать третья глава посвящена акустике. Вычисляется скорость звука в предположении, что частицы воздуха совершают гармонические колебания. Найдена длина маятника, изохронного периоду звуковой волны.

В *двадцать четвертой главе* исследуются колебания молекул воздуха с учетом диссипации энергии. Результаты используются при анализе колебаний воздуха в экспериментальной установке для определения скорости звука. Примечательным обстоятельством является то, что в главе имеется одна из первых попыток изучения процессов в газах на основе молекулярно-кинетической теории.

В *приложении* к основным главам «Форономии» интересны разделы о вычислении моментов инерции по Х. Гюйгенсу, описание методов интерполяции, вывод формулы Торричелли. Кроме того, в приложении решена задача о движении материальной точки по заданной кривой под действием силы притяжения, направленной по нормали к кривой. График зависимости силы от расстояния представляет собой эволюту траектории.

Даже такое краткое описание содержания «Форономии» показывает, что труд Я. Германа значительно повлиял на развитие теоретической механики. Заслугой Я. Германа является то, что он пренебрег конфликтом научных школ Ньютона и Лейбница [7] и объединил полученные ими результаты в системном и основательном виде. Это имело большое значение для формирования современных представлений в теоретической механике. В «Форономии» рассмотрены задачи, имеющие техническое значение: о движении жидкости в трубах и каналах, о движении парусников. Таким образом, впервые в этой книге теоретическая механика рассматривается и как инструмент познания природы, и как основа для развития техники.

Частные результаты «Форономии» также имели большое значение для развития теоретической механики. Уже упоминалось, что в этой книге дано близкое к современному определение скорости, которое не решался дать позже Ж.-Л. Даламбер [8]. Идея разложения сил, ускорений и скоростей на нормальную и касательную составляющие получила развитие в трудах Л. Эйлера [1]. Я Герман начал применять молекулярно-кинетические представления для анализа процессов в газах и жидкостях, далее этот подход был развит Д. Бернулли в его «Гидродинамике» [9]. Неоспорим вклад Я. Германа в создание «петербургского принципа», формы основного принципа кинетики, который носит имена Я. Германа и Ж.-Л. Даламбера.

Можно указать неполные результаты, приведенные Я. Германом в его книге, которые тем не менее послужили для дальнейшего развития механики. Это вопросы статики оболочек, задача о кривых Рибокура, исследование сосудов и труб под давлением, обтекания пластинок, движения жидкости в руслах каналов. Исследование движения парусного судна продолжил, в частности, Л. Буге [1]. Некоторые задачи из «Форономии»: о равновесии тел в жидкости, о движении материальных точек в среде с сопротивлением, об ударе – могут найти свое место при преподавании теоретической механики. Естественно, потребуется их переработка аналитическим методом.

Поэтому допустимо сделать общий вывод: труд Я. Германа представляет существенный интерес для истории теоретической механики, для ее методологии, а также может использоваться при преподавании этой науки. Поэтому работа Якоба Германа сохраняет свое значение и в современности, заслуживает внимания исследователей.

Изложение содержания «Форономии» выполнено по [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Яковлев, В. И.** Начала аналитической механики / В. И. Яковлев. – М. ; Ижевск : Издательство Института компьютерных исследований, 2002. – 339 с.
- 2 **Григорьян, А. Т.** Очерки истории механики в России / А. Т. Григорьян. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – 289 с.
- 3 **Юшкевич, А. П.** История математики в России до 1917 г. / А. П. Юшкевич. – М. : Наука, 1968. – 591 с.
- 4 **Энциклопедический словарь** : в 20 т. / изд. Ф. А. Брокгауз и И. А. Ефрон. – СПб. : Типо-литография И. А. Ефрона, 1893. – Т. VIIIА. – 625 с.
- 5 **Савелов, А. А.** Плоские кривые / А. А. Савелов. – М. : Физматгиз, 1960. – 294 с.
- 6 **Жуковский, Н. Е.** Аналитическая механика / Н. Е. Жуковский. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 208 с.
- 7 **Дуран, А.** Истина в пределе. Анализ бесконечно малых / А. Дуран. – М. : Де Агостини, 2014. – 144 с.
- 8 **Даламбер, Ж.-Л.** Динамика / Ж.-Л. Даламбер. – Новокузнецк : ИО НФМИ, 2000. – 336 с.
- 9 **Григорьян, А. Т.** Д. Бернулли. 1700–1782 / А. Т. Григорьян, Б. Д. Ковалев. – М. : Наука, 1981. – 313 с.
- 10 **Herman, J.** Phoronomia. Transl. in English by I. Bruce. – URL : <https://www.17centurymaths.com/contents/hermanphoronomia.htm> (дата обращения : 25.09.2024).

D. V. KOMNATNY

Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Belarus

A BRIEF ANALYSIS OF JAKOB HERMANN'S TREATISE ON THEORETICAL MECHANICS, "PHORONOMIA"

A brief description and analysis of Jacob Hermann's treatise on theoretical mechanics, "Phoronomia" is implemented. The influence of this work on the subsequent development of theoretical mechanics in the works of L. Euler and D. Bernoulli is revealed. The problems posed in the treatise and the obtained results are analyzed, representing Hermann's contribution to the creation of modern engineering mechanics. The possibilities of using the materials of "Phoronomia" in the educational process at modern universities are discussed.

Keywords: history of theoretical mechanics, Hermann – d'Alembert principle, St. Petersburg Academy of Sciences, teaching theoretical mechanics.

Получено 02.05.2025