

УДК 621.837:531.8

А. В. КОТОВ^{1,2}, Д. Г. КРОЛЬ²

¹*ОАО «Сейсмотехника», Гомель, Беларусь*

²*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь*

ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ДЕФОРМИРУЕМОГО МНОГОГРАННИКА К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИОННОГО КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПЛОСКОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА

Представлены математическая постановка и результаты решения задачи оптимизационного кинематического синтеза плоского рычажного механизма, воспроизводящего заданную траекторию точки движения выходного звена, с помощью метода деформируемого многогранника. Дана качественная оценка эффективности использования данного метода при проведении многопараметрического оптимизационного кинематического синтеза механизмов с учетом и без учета возможности наложения дополнительных ограничений.

Ключевые слова: лямбда-механизм, оптимизационный синтез, деформируемый многогранник, симплекс, ограничения.

Введение. В современном машиностроении четырехзвенные рычажные механизмы нашли широкое применение благодаря своему уникальному сочетанию конструктивных и функциональных преимуществ. Данные механизмы при рациональном выборе их геометрических параметров, несмотря на минимальное количество звеньев, позволяют реализовать сложные траектории движения рабочих органов машин [1]. Однако в связи с возросшими требованиями к эффективности, точности и надежности рычажных механизмов традиционные методы проектирования, основанные на опыте и интуиции, уже с трудом позволяют достичь необходимых кинематических параметров. Поэтому оптимизационный кинематический синтез рычажных механизмов становится ключевым фактором, обеспечивающим конкурентоспособность разрабатываемой техники.

В учебной практике в основном уделяется внимание геометрическим методам синтеза рычажных механизмов, которые отличаются наглядностью, относительной простотой, но уступают в точности решения поставленной задачи [2]. В последнее время в связи с широким внедрением математических пакетов и языков программирования произошел заметный скачок в применении численных алгоритмов оптимизации для кинематического синтеза рычажных механизмов [3–7]. В результате геометрические методы синтеза постепенно уходят на второй план, уступая место более точным и эффективным машинным алгоритмам.

На сегодня не существует универсального численного алгоритма, способного эффективно решать весь спектр оптимизационных задач [8]. Применение популярных градиентных алгоритмов к задачам оптимизационного кинематического синтеза рычажных механизмов требует больших затрат вычислительных ресурсов и не всегда является эффективным. В то же время потенциал безградиентных алгоритмов для решения данного класса задач освещен в научной литературе недостаточно полно, что с учетом их высокой адаптации для программной реализации [9] требует проведения дополнительных исследований.

Цель исследования. Оценить возможность применения алгоритма многопараметрической безградиентной оптимизации на основе метода деформируемого многогранника для решения задачи оптимизационного кинематического синтеза плоского рычажного механизма. Дать качественную оценку использования данного метода при его реализации в математическом пакете PTC.MathCAD.

Методы исследований. Аналитическое описание кинематики рассматриваемого плоского рычажного механизма основано на векторном методе преобразования координат в неизменном базисе. При проведении оптимизационного кинематического синтеза механизма использовались численные методы оптимизации и математического программирования.

Постановка и решение задачи кинематического анализа. Среди четырехзвенных рычажных механизмов особое место занимает так называемый лямбда-механизм (лямбдаобразный механизм, или механизм Чебышева), кинематическая схема которого приведена на рисунке 1. При определенном сочетании длин звеньев лямбда-механизм преобразует вращательное движение ведущего звена в приближенное прямолинейное движение одной из своих точек на некотором

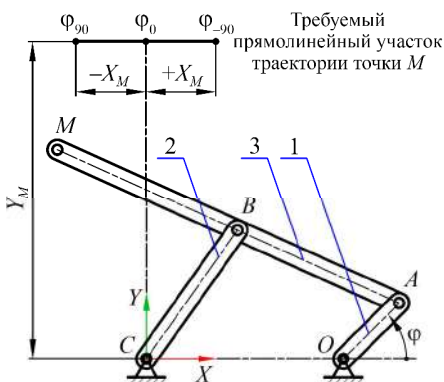


Рисунок 1 – Кинематическая схема лямбда-механизма:

1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – коромысло

ограниченном участке траектории ее движения [10]. Несмотря на то, что на сегодня наблюдается тенденция к постепенному вытеснению лямбда-механизмов более точными механическими системами, данные механизмы всё еще активно используются в машиностроении [11, 12], а оценка эффективности работы многих оптимизационных алгоритмов проверяется именно на данном механизме [13, 14].

Пусть для рассматриваемого лямбда-механизма (см. рисунок 1), имеющего произвольные геометрические параметры, требуется обеспечить максимально прямолинейный

участок траектории шатунной кривой точки M . Данная траектория должна быть расположена на некотором заданном расстоянии по вертикали Y_M и проходить через три точки, каждая из которых соответствует определенному углу φ поворота ведущего звена. Примем, что две крайние точки для $\varphi = 90^\circ$ и -90° расположены на расстоянии $\pm X_M$ по горизонтали относительно начала принятой системы координат, а ордината средней точки для $\varphi = 0$ совпадает с началом системы координат (см. рисунок 1).

В качестве оптимизируемых параметров будут выступать длины звеньев рычажного механизма, а также координата точки O по оси X , которые представим в виде следующего вектора оптимизируемых параметров:

$$\bar{p} = (p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4)^T \equiv (O_X \ L_{OA} \ L_{BC} \ L_{AB} \ L_{BM})^T. \quad (1)$$

Прежде чем приступить к решению задачи кинематического синтеза, необходимо описать кинематику движения всех характерных точек механизма с учетом вектора оптимизируемых параметров (1) и угла φ поворота ведущего звена относительно принятой системы координат (обобщенной координаты). В основу аналитического описания кинематики лямбда-механизма положен векторный метод преобразования координат в неизменном базисе, представленный в работах [15–17]. Используя приведенные в них аналитические зависимости, опишем кинематику рассматриваемого рычажного механизма:

$$\bar{C} = (0 \ 0 \ 0)^T; \quad \bar{O}(\bar{p}) = (p_0 \ 0 \ 0)^T; \quad (2)$$

$$\overline{OA}(\varphi, \bar{p}) = \text{TurnXY}(\bar{e}_X, \varphi, p_1) \quad (3)$$

(выражение (3) дает вектор звена OA путем поворота единичного вектора оси X на угол φ против хода часовой стрелки (перед углом стоит знак «+») с изменением его длины на оптимизируемую длину $p_1 \equiv L_{OA}$);

$$\bar{A}(\varphi, \bar{p}) = \bar{O}(\bar{p}) + \overline{OA}(\varphi, \bar{p}); \quad \bar{CA}(\varphi, \bar{p}) = \bar{A}(\varphi, \bar{p}) - \bar{C}; \quad (4)$$

$$\alpha_{BCA}(\varphi, \bar{p}) = T \cos(|\bar{CA}(\varphi, \bar{p})|, p_2, p_3) \quad (5)$$

(формула (5) описывает вычисление угла α_{BCA} с помощью теоремы косинусов по заданным оптимизируемым длинам звеньев $p_2 \equiv L_{BC}$ и $p_3 \equiv L_{AB}$, а также модулю вектора CA , определяющему расстояние между точками C и A);

$$\overline{CB}(\varphi, \bar{p}) = \text{TurnXY}(\overline{CA}(\varphi, \bar{p}), \alpha_{BCA}(\varphi, \bar{p}), p_2); \quad (6)$$

$$\bar{B}(\varphi, \bar{p}) = \bar{C} + \overline{CB}(\varphi, \bar{p}); \quad \overline{AB}(\varphi, \bar{p}) = \bar{B}(\varphi, \bar{p}) - \bar{A}(\varphi, \bar{p}); \quad (7)$$

$$\overline{BM}(\varphi, \bar{p}) = \text{TurnXY}(\overline{AB}(\varphi, \bar{p}), 0, p_4); \quad (8)$$

(выражение (8) позволяет получить вектор звена BM , являющийся коллинеарным к исходному поворачиваемому вектору звена AB , поворот исходного вектора осуществлен на нулевой угол);

$$\bar{M}(\varphi, \bar{p}) = \bar{B}(\varphi, \bar{p}) + \overline{BM}(\varphi, \bar{p}). \quad (9)$$

Приведенные выражения (2)–(9) представляют собой функции, зависящие не только от обобщенной координаты – угла φ поворота ведущего звена, но и от вектора (1) оптимизируемых параметров.

Постановка и решение задачи оптимизационного синтеза. В большинстве случаев аналитическое решение задачи оптимизационного кинематического синтеза рычажного механизма позволяет приближенно реализовать требуемую траекторию движения интересующей точки механизма. После разработки и внедрения в современные математические пакеты и языки программирования высокоэффективных алгоритмов оптимизации стало возможным существенно повысить точность решения рассматриваемой задачи.

Задача любого оптимизационного синтеза заключается в минимизации некоторой целевой функции. Как правило, при ее формировании используется метод, связанный с анализом невязок некоторого расчетного параметра по сравнению с его оптимальным (допускаемым) значением [5, 6]. Для рассматриваемого механизма в качестве такой невязки принято отклонение расчетной траектории шатунной кривой радиус-вектора точки M от ее заданной оптимальной траектории M^* , а сама сформированная целевая функция может быть представлена в следующем виде:

$$f(\bar{p}) = \sum_{i=1}^n \left| \bar{M}(\varphi_i, \bar{p}) - \bar{M}_i^* \right|^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

где n – число заданных точек на прямолинейном участке траектории.

Для проведения оптимизационного кинематического синтеза рассматриваемого лямбда-механизма путем минимизации сформированной целевой функции (10) применен метод деформируемого многогранника, известный также как метод Нелдера – Мида [18]. Указанный метод работает с симплексом – геометрической фигурой, каждая вершина которой соответствует некоторому вектору набора оптимизируемых параметров.

Для программной реализации оптимизационного алгоритма деформируемого многогранника использовались известные блок-схемы [8, 18, 19], примеры адаптации алгоритма в различных математических пакетах и языках программирования [19–22], а также работы [23–25]. В результате была осуществлена программная реализация полностью работоспособного оптимизационного алгоритма для математического пакета PTC.MathCAD [26].

Особенностью данного алгоритма стали использование легко читаемого программного кода за счет применения осмысленных буквенных обозначений для вершин симплекса (вместо i -х индексов); автоматизированное формирование вершин исходного регулярного симплекса, интегрированное в тело алгоритма; ряд второстепенных программных улучшений, направленных на повышение эффективности работы алгоритма. Также стоит отметить, что из-за обнаруженного разночтения в опубликованных блок-схемах алгоритма в качестве исходной была принята оригинальная схема [18].

Работоспособность оптимизационного алгоритма проводилась в среде математического пакета PTC.MathCAD на известных тестовых функциях [27]. Установлено, что метод деформируемого многогранника дает достаточно высокую точность решения, а также скорость сходимости за счет отсутствия операций с производными. Следовательно, данный метод обладает потенциалом для использования при большом числе оптимизируемых параметров и применении более сложных критериев оптимизации, что особенно важно при проведении кинематического синтеза многосвязных рычажных механизмов.

Результаты и обсуждение. Из аналитической геометрии известно, что если одна из вершин регулярного симплекса соответствует точке исходного вектора оптимизируемых параметров, то координаты оставшихся вершин такого симплекса удобно задавать с помощью матрицы размера $N \times (N+1)$, где N – число вершин симплекса [8, 9]. Для принятого вектора оптимизируемых параметров (1), состоящего из пяти элементов, она имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} 0 & d_1 & d_2 & d_2 & d_2 & d_2 \\ 0 & d_2 & d_1 & d_2 & d_2 & d_2 \\ 0 & d_2 & d_2 & d_1 & d_2 & d_2 \\ 0 & d_2 & d_2 & d_2 & d_1 & d_2 \\ 0 & d_2 & d_2 & d_2 & d_2 & d_1 \end{bmatrix} + \bar{p}_{in}; \quad \begin{aligned} d_1 &= \frac{a}{N \cdot \sqrt{2}} (\sqrt{N+1} + N - 1); \\ d_2 &= \frac{a}{N \cdot \sqrt{2}} (\sqrt{N+1} - 1), \end{aligned} \quad (11)$$

где a – расстояние между двумя вершинами симплекса; \bar{p}_{in} – исходный вектор оптимизируемых параметров, используемый в качестве начального приближения в оптимизационном алгоритме.

После того как сформирована матрица вершин исходного регулярного симплекса, можно применить предложенный математический алгоритм оптимизации методом деформируемого многогранника [26], для которого входными параметрами будут выступать матрица вершин регулярного симплекса (11) и целевая функция (10), а выходным параметром – вектор найденных оптимизированных параметров:

$$\bar{p}_{nm} = NM(f(\bar{p}), X).$$

На рисунке 2 приведена визуализация в математическом пакете PTC.MathCAD кинематической схемы рассматриваемого рычажного механизма до и после проведения оптимизационного кинематического синтеза методом деформируемого многогранника, а в таблице 1 приведены числовые значения для вектора исходных и оптимизированных параметров.

Как видно из полученных результатов расчета (см. рисунок 2, б), прямолинейный участок траектории шатунной кривой точки M полностью удовлетворяет всем предъявленным требованиям (проходит через все заданные точки). При этом значения трех оптимизируемых параметров (длин звеньев L_{BC} , L_{AB} , L_{BM}) получены практически равными друг другу, что соответствует известным аналитическим выражениям [1, 10].

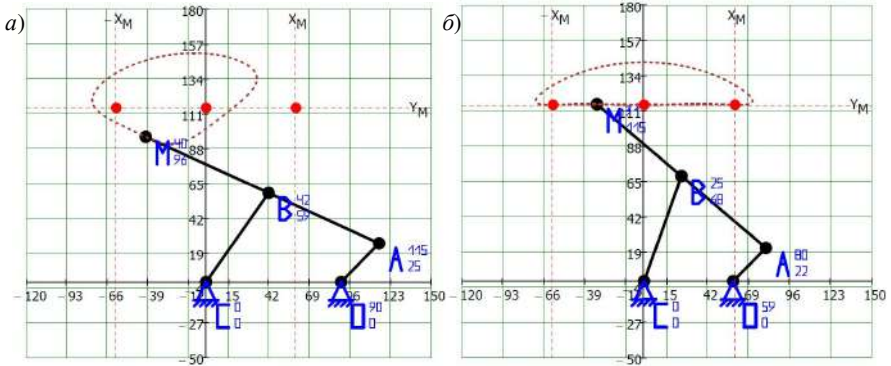


Рисунок 2 – Визуализация в математическом пакете PTC.MathCAD кинематической схемы механизма до (а) и после (б) проведения оптимизационного синтеза

Таблица 1 – Результаты оптимизационного синтеза

В миллиметрах

Вектор	Оптимизируемые параметры					
	O_X	L_{OA}	L_{BC}	L_{AB}	L_{BM}	f
\bar{p}_{in}	90,0	36,0	72,0	81,0	90,0	–
\bar{p}_{nm}	58,6	30,6	72,7	72,7	72,8	0,002
\bar{p}_{mcd}	60,3	31,5	73,7	74,1	72,5	0,446

Примечание – Задан прямолинейный участок траектории $Y_M = 115$ мм и $X_M = \pm 60$ мм.

Стоит отметить, что на сегодня все современные оптимизационные алгоритмы должны иметь возможность решать задачи с учетом функциональных ограничений. Решение таких задач имеет большое практическое значение для машиностроения, так как такие ограничения могут накладываться в процессе кинематического синтеза на все оптимизируемые параметры, например, на длины звеньев. Как показали результаты исследования, оптимизационный алгоритм деформируемого многогранника возможно адаптировать к решению задач условной оптимизации с ограничениями в виде равенств и (или) неравенств без существенного снижения точности и скорости решения, используя метод штрафных или барьерных функций [8].

Для решения задачи оптимизационного кинематического синтеза все наложенные ограничения должны быть приведены к виду

$$h_i(\bar{p}) = 0 ; g_i(\bar{p}) < 0.$$

Тогда, воспользовавшись методом штрафных функций, суммарные функции штрафов можно представить в виде [8, 20]

$$h_{\Sigma}(\bar{p}) = C_h \sum_i |h_i(\bar{p})|^2 ; g_{\Sigma}(\bar{p}) = C_g \sum_i \max(0, g_i(\bar{p}))^2, \quad (12)$$

где C_h и C_g – коэффициенты штрафов для равенств и неравенств.

Затем сформированную общую функцию штрафов (12) необходимо добавить к целевой функции (10) и заново решить оптимизационную задачу методом деформируемого многогранника:

$$\bar{p}_{nm}^* = NM(f(\bar{p}) + h_{\Sigma}(\bar{p}) + g_{\Sigma}(\bar{p}), X).$$

Проверка адекватности. Для проверки достоверности найденного глобального минимума целевой функции применялись два наиболее распространенных подхода. Первый заключался в сравнении с результатами расчета, полученными с помощью других уже проверенных оптимизационных алгоритмов, а второй – в анализе результатов, полученных для разных начальных значений исходного вектора оптимизируемых параметров.

Проверка оптимизационного алгоритма с помощью первого подхода проводилась при помощи встроенного в математический пакет PTC.MathCAD функции численной минимизации [20, 22]

$$\bar{p}_{mcd} = \text{minimize}(f(\bar{p}), \bar{p}),$$

результаты расчета по которой приведены в таблице 1.

Проверка с помощью второго подхода проводилась путем изменения значений для вектора оптимизируемых параметров в пределах $\pm 30\%$ от их исходных величин с последующим отслеживаем поиска оптимального решения алгоритмом. Все полученные результаты проверки подтвердили достаточную устойчивую сходимую оптимизационного алгоритма к одному и тому же глобальному минимуму целевой функции.

Выводы. В работе представлен алгоритм и результаты оптимизационного кинематического синтеза рычажного механизма методом деформируемого многогранника. Данный метод показал высокую скорость поиска оптимального решения, эффективность применения при большом числе оптимизируемых параметров, а также возможность постановки задачи с учетом или без учета дополнительных ограничений. В то же время при анализе сильно овражных функций метод деформируемого многогранника чувствителен к начальным условиям, что необходимо учитывать в случае применения данного оптимизационного алгоритма к конкретной поставленной задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Артоболевский, И. И. Механизмы в современной технике : справ. пособие : в 7 т. / И. И. Артоболевский. – 2-е изд. перераб. – М. : Наука, 1979. – Т. 1 : Элементы механизмов. Простейшие рычажные и шарнирно-рычажные механизмы. – 496 с.

2 Артоболевский, И. И. Синтез плоских механизмов : учеб. для вузов / И. И. Артоболевский, Н. И. Левитский, С. А. Черкудинов. – М. : Физматгиз, 1959. – 1084 с.

3 Optimal synthesis of four-bar linkages for path generation using the individual repairing method / X. Yao, X. Wang, W. Sun [et al.] // Mechanical Sciences. – 2022. – Vol. 13, is. 1. – P. 79–87.

4 Optimum dimensional synthesis of planar mechanisms with geometric constraints / V. Garcia-Marina, I. Fernandez de Bustos, G. Urkullu, R. Ansola // *Meccanica*. – 2020. – Vol. 55, is. 11. – P. 2135–2158.

5 **Халтурин, М. А.** Синтез прямолинейно-направляющего механизма для отрезки заготовок эскимо / М. А. Халтурин // *Вестник Вологодского государственного университета. Серия: Технические науки*. – 2019. – № 1 (3). – С. 27–34.

6 **Бейсенов, Н. К.** Оптимизационно-метрический синтез шарнирного четырехзвенника / Н. К. Бейсенов // *Технические науки – от теории к практике*. – 2016. – № 2 (50). – С. 65–77.

7 **Гебель, Е. С.** Оптимизационный кинематический синтез четырехзвенного рычажного механизма по двум заданным положениям / Е. С. Гебель, Е. А. Чигринова // *Омский научный вестник*. – 2020. – № 3 (171). – С. 21–25.

8 **Химмельблау, Д.** Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 534 с.

9 **Аттетков, А. В.** Методы оптимизации : учеб. для вузов / А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 439 с.

10 **Баранов, Г. Г.** Курс теории механизмов и машин / Г. Г. Баранов. – М. : Машиностроение, 1975. – 494 с.

11 **Будзило, Е. Е.** Использование нового бульдозерного оборудования с механизмом Чебышева при производстве строительных работ / Е. Е. Будзило, Е. В. Гречишкина, М. Ю. Псюк // *Наукоемкие технологии и оборудование в промышленности и строительстве*. – 2023. – № 2 (76). – С. 106–113.

12 **Manickavelan, K.** Design, fabrication and analysis of four bar walking machine based on Chebyshev's parallel motion mechanism / K. Manickavelan, B. Singh, N. Sellappan // *European International Journal of Science and Technology*. – 2014. – Vol. 3, is. 8. – P. 65–73.

13 **Mehdigholi, H.** Optimization of Watt's six-bar linkage to generate straight and parallel leg motion / H. Mehdigholi, S. Akbarnejad // *International Journal of Advanced Robotic Systems*. – 2012. – Vol. 9, is. 1. – P. 1–6.

14 **Поляков, Б. Н.** Оптимизация кинематических параметров рычажных четырехзвенных механизмов / Б. Н. Поляков // *Прикладная информатика*. – 2010. – № 3 (27). – С. 108–112.

15 **Бобыренко, С. Н.** Моделирование процесса работы механизма подпрессовки питающего аппарата кормоуборочного комбайна / С. Н. Бобыренко, А. В. Котов // *Вестник Белорусско-Российского университета*. – 2011. – № 1 (30). – С. 18–26.

16 **Котов, А. В.** Оптимизация параметров предохранительного элемента пальчикового механизма шнека жатки зерноуборочного комбайна / А. В. Котов // *Тракторы и сельхозмашины*. – 2023. – Т. 90, № 1. – С. 13–24.

17 **Котов, А. В.** Анализ уравновешенности кривошипно-ползунного механизма привода режущего аппарата методом векторов главных точек / А. В. Котов // *Тракторы и сельхозмашины*. – 2024. – Т. 91, № 2. – С. 167–180.

18 **Nelder, J. A.** A simplex method for function minimization / J. A. Nelder, R. Mead // *The Computer Journal*. – 1965. – Vol. 7, is. 4. – P. 308–313.

19 **Банди, Б.** Методы оптимизации: вводный курс / Б. Банди. – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.

20 Гальченко, В. Я. MathCAD: математические методы и инструментальные средства оптимизации / В. Я. Гальченко, Р. В. Трёмбовецкая. – Черкассы : ЧП Гордиенко Е. И., 2018. – 516 с.

21 Мэтьюз, Дж. Г. Численные методы. Использование MATLAB / Дж. Г. Мэтьюз, К. Д. Финк. – М. : Вильямс, 2001. – 720 с.

22 Дмитриева, Т. Л. Реализация условной задачи нелинейного математического программирования с использованием метода деформируемого многогранника в программе MathCAD / Т. Л. Дмитриева, В. Т. Нгуен // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2014. – № 4 (44). – С. 73–79.

23 Lagarias, J. C. Convergence of the restricted Nelder-Mead algorithm in two dimensions / J. C. Lagarias, B. Poonen, M. H. Wright // SIAM Journal on Optimization. – 2012. – Vol. 22, is. 2. – P. 501–532.

24 Суфиянов, В. Г. Метод Нелдера-Мида решения задачи оптимизации геометрической формы ствола автоматической пушки для улучшения колебательных характеристик / В. Г. Суфиянов, Д. А. Клокин, И. Г. Русяк // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2023. – Т. 25, № 4 (114). – С. 121–131.

25 Петрушин, А. Д. Оптимизация активной части вентильно-индукторного электродвигателя / А. Д. Петрушин, А. В. Кашуба // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2016. – № 1 (61). – С. 61–65.

26 Алгоритм деформируемого многогранника. – URL : https://drive.google.com/file/d/172ozZXepgDCfWc3eA4_xJd_zgVEIpyu (дата обращения: 21.10.2025).

27 Тимофеева, О. П. Исследование популяционных алгоритмов в решении задач непрерывной оптимизации / О. П. Тимофеева, С. А. Неимушев, Л. И. Неимушева // Труды НГТУ им. П. Е. Алексеева. – 2018. – № 4 (123). – С. 48–55.

A. V. KOTOV^{1,2}, D. G. KROL²

¹JSC Seismotekhnika, Gomel, Belarus

²Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Belarus

EVALUATION OF THE POSSIBILITY OF APPLYING THE DEFORMABLE POLYHEDRON METHOD TO THE PROBLEM OF KINEMATIC SYNTHESIS OPTIMIZATION FOR A FLAT LEVER MECHANISM

The paper presents a mathematical formulation and solution results for the problem of optimization kinematic synthesis of a flat lever mechanism, reproducing a given trajectory of the output link's motion point, using the deformable polyhedron method. A qualitative assessment of the method effectiveness in performing multiparameter optimization kinematic synthesis of mechanisms, with and without the possibility of imposing additional constraints, is provided.

Keywords: lambda mechanism, optimization synthesis, deformable polyhedron, simplex, constraints.

Получено 30.10.2025