Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 1

ФИЗИКА

А. Б. МИГДАЛ

ВЛИЯНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ НА ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

(Представлено академиком В. А. Фоком 23 II 1954)

1. Как было показано Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуком [1, 2], тормозное излучение и образование пар в конденсированной среде при больших энергиях ($E > 10^{12}-10^{13}$ эв) ослабляется благодаря влиянию многократного рассеяния. В [2] оценено сечение тормозного излучения и образования пар по порядку величины для сверхбольших энергий ($E \gg 10^{12}-10^{13}$ эв).

В настоящей работе дано количественное решение задачи о тормозном излучении, причем энергия электронов ограничена только условием $E \gg mc^2$. Рассматривается излучение квантов с энергией много меньшей, чем энергия электронов, что позволяет пользоваться классической механикой и классической теорией излучения.

2. Энергия, излучаемая внутрь телесного угла $d\Omega$, в интервале частот $d\omega$ равна [3]

$$E_{\mathbf{n},\,\omega}\, d\Omega\, d\omega = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c^3} \iint dt\, dt' e^{i\omega(t-t') - i\mathbf{k}[\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t')]}\, \mathbf{n}\times\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{v}(t')\, d\Omega\, d\omega; \qquad (1)$$

ω — частота; $\mathbf{k}$ — волновой вектор излучаемых волн; $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$; $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ — координата и скорость электрона в момент t.

Выражение (1) может быть изображено в виде более удобном для дальнейшего виде:

$$E_{\mathbf{n},\,\omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c^3} \int_{-T}^{T} dt \int_0^\infty \{e^{-i\omega\tau + i\mathbf{k}[\mathbf{r}(t+\tau)-\mathbf{r}(t)]}\, \mathbf{n}\times\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{v}(t-\tau) + \text{к. с.}\}\, d\tau, \qquad (2)$$

где к. с. — комплексно сопряженное выражение.

Задача состоит в усреднении (1) по всем возможным траекториям частицы. Усреднение выражения (1) производится следующим образом:

$$\langle I\rangle = \langle e^{i\mathbf{k}[\mathbf{r}(t+\tau)-\mathbf{r}(t)]}\, \mathbf{n}\times\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{v}(t+\tau)\rangle =$$
$$= \int d\mathbf{v}\, d\mathbf{v}'\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\, \mathbf{n}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{v}'\, W_1(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, W_2(\mathbf{r},\mathbf{v};\mathbf{r}',\mathbf{v}';\tau); \qquad (3)$$

W_1 — вероятность значений координат и скоростей $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ в момент t; W_2 — вероятность значений $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{v}'$ в более поздний момент $t+\tau$ при условии, что эти величины в момент t имеют значения $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$; W_1 и W_2 удовлетворяют обычному кинетическому уравнению.

3. Углы векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{n}$ с первоначальным направлением скорости $\mathbf{v}_0$ весьма малы $\left(\sim\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$. Поэтому удобно пользоваться угловыми векторами

$$\vec{\vartheta} = \frac{\mathbf{v}-\mathbf{v}_0}{v_0}; \quad \vec{\vartheta}' = \frac{\mathbf{v}'-\mathbf{v}_0}{v_0}; \quad \vec{\vartheta}_k = \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}_0}{v_0}.$$

Так как величина скорости не меняется при рассеянии, можно пользоваться кинетическим уравнением в пространстве углов $\vec{\vartheta}$, $\vec{\vartheta}'$.

Легко убедиться, что

$$\mathbf{n} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}' = \vec{\xi} \cdot \vec{\eta} v^2,$$

где

$$\vec{\xi} = \vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_k, \qquad \vec{\eta} = \vec{\vartheta}' - \vec{\vartheta}_k.$$

Так как W_2 зависит от $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$, можно произвести интегрирование в (2) по $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ и $\mathbf{r}$. Производя также интегрирование (2) по углам $\vec{\vartheta}_k$, что значительно упрощает расчет, получим:

$$\int \langle I \rangle \, d\vec{\vartheta}_k = v^2 \int d\vec{\xi} \, d\vec{\eta} \cdot \vec{\xi}\vec{\eta} \cdot W_{-k}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau). \tag{4}$$

Здесь использованы равенства:

$$\int W_1(\vec{\xi} + \vec{\vartheta}_k, t) \, d\vec{\vartheta}_k = 1; \qquad W_{-\mathbf{k}} = \int W_2 e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} \, d(\mathbf{r}' - \mathbf{r}).$$

Уравнение для $W_{-\mathbf{k}}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \tau)$ имеет вид (уравнение Фоккера — Планка в угловом пространстве ([4]) с заменой оператора $v\nabla$ на $-i\mathbf{k}\mathbf{v}$):

$$\frac{\partial W_{-\mathbf{k}}}{\partial \tau} - ikv\left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) W_{-\mathbf{k}} = q \Delta_\eta W_{-\mathbf{k}}, \tag{5}$$

где $q = \frac{nv}{4} \int \sigma(\theta, \varphi) \, \theta^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$.

Начальное условие для $W_{-\mathbf{k}}$ имеет вид

$$W_{-\mathbf{k}}|_{\tau=0} = \delta(\vec{\xi} - \vec{\eta}).$$

Так как коэффициенты уравнения (5) не зависят от $\vec{\xi}$, то вектор $\mathbf{R} = \int \vec{\xi} W_{-\mathbf{k}} \, d\vec{\xi}$ также удовлетворяет уравнению (4). Полагая $\mathbf{R} = \vec{\eta}\varphi(\eta, \tau)$, получим уравнение для φ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - ikv\left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right)\varphi = q\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{3}{\eta}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) \tag{6}$$

с начальным условием $\varphi(\eta, 0) = 1$.

Вводя функцию f по формуле $f(z) = z \int\limits_0^\infty e^{-i\omega\tau} \varphi(z, \tau) \, d\tau + \frac{i}{\omega}$, $z = \frac{\eta^2}{2}$, легко получить, используя условие $\varphi|_{\tau=0} = 1$,

$$zf'' - \frac{i\omega}{2q}\left(1 - \frac{v}{c} + z\right) f = \frac{1 - v/c}{2q}. \tag{7}$$

Так как выражение $\int \langle I \rangle \, d\vec{\vartheta}_k$ не зависит от t, то излучаемая энергия E_ω согласно (2) пропорциональна времени $2T$ движения частицы в среде. Деля E_ω на $2T$, находим потерю энергии за единицу времени. Таким образом находим (используя $v/c \cong 1$)

$$\frac{dE_\omega}{dt} = \frac{2e^2\omega^2}{\pi c} \operatorname{Re} \int\limits_0^\infty f \, dz. \tag{8}$$

Условие в нуле, вытекающее из определения f, следующее: $f(0)=\frac{i}{\omega}$; на бесконечности следует требовать ограниченности f.

4. Уравнение (7) решаем методом Лапласа, полагая $u_p=\int\limits_0^\infty e^{-pz}f\,dz$. Для $u(p)$ получаем неоднородное уравнение первого порядка, решение которого

$$u(p)=\frac{i/\omega}{p_1^2-p^2}\left(\frac{p_1+p}{p_1-p}\right)^\mu\int\left(1+i\frac{1-v/c}{2qp}\right)\left(\frac{p_1-p}{p_1+p}\right)^\mu dp. \qquad (9)$$

Здесь $\mu=\frac{1-v/c}{4}\sqrt{\frac{\omega}{q}}(1+i)$, $p_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{q}}(1+i)$. Предел интегрирования выбран из условия ограниченности f при $z\to\infty$ (для этого необходимо, чтобы $u(p)$ не обращалось в ∞ в правой полуплоскости p). Для получения $\int\limits_0^\infty \operatorname{Re} f\,dz$ необходимо найти $\operatorname{Re} u(p)$ при $p\to 0$.

Из выражения

$$\operatorname{Re} u(p)=\int\limits_0^\infty e^{-p^0 z}(\operatorname{Re} f\cdot\cos p'z-\operatorname{Im} f\cdot\sin p'z)\,dz \quad (p=p^0+ip')$$

вытекает, что для выполнения равенства $\int\limits_0^\infty \operatorname{Re} f\,dz=\operatorname{Re} u(0)$ необходимо стремить p к нулю по вещественной оси. Учитывая это обстоятельство и производя подстановку $\frac{p}{p_1}=\operatorname{th}\frac{x}{2}$, легко получить, что

$$\int\limits_0^\infty \operatorname{Re} f\,dz=\frac{1-v/c}{\omega}\left\{\frac{1}{8s}\int\limits_0^\infty e^{-sx}\frac{\cos sx-\sin sx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}+\int\limits_0^\infty e^{-sx}\frac{\sin sx}{\operatorname{sh} x}dx-\frac{\pi}{4}\right\},$$

где $s=\frac{1-v/c}{4}\sqrt{\frac{\omega}{q}}$.

Выражение (8) может быть переписано в виде

$$\frac{dE_\omega}{dt}=\left\{\frac{dE_\omega}{dt}\right\}_0\Phi(s), \qquad (10)$$

где $\left\{\frac{dE_\omega}{dt}\right\}_0=\frac{4e^2q}{3\pi c(1-v/c)}$ — обычное выражение для излучаемой энергии без учета многократного рассеяния ([3]).

Функция $\Phi(s)$ равна:

$$\Phi(s)=3s\int\limits_0^\infty e^{-sx}\frac{\cos sx+\sin sx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}dx+24s^2\int\limits_0^\infty e^{-sx}\frac{\sin sx}{\operatorname{sh} x}dx-6\pi s^2. \qquad (11)$$

При $s\to\infty$ $\Phi(s)\to 1-\frac{48}{7s^4}+\ldots$. Таким образом, при малых энергиях получаем обычное выражение. При $s\to 0$ $\Phi(s)\to 6s$ и $\frac{dE_\omega}{dt}=\frac{2e^2}{\pi c}\sqrt{q\omega}$, что с точностью до численного множителя совпадает с результатом, полученным в ([2]), если использовать выражение для q в случае кулоновских соударений ([4])

$$q=4\pi nz^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\lg 180\,z^{-1/3}.$$

Из выражения для $\Phi(s)$ при $s \to \infty$ можно найти энергию, при которой ошибка обычной формулы достигает 50%. Для свинца, для квантов с энергией $\hbar\omega = {}^1/_2 E_{кр}$ получаем $E_{кр} = 3 \cdot 10^{12}$ эв. Функция $\Phi(s)$ легко может быть протабулирована.

Поступило
9 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН, **92**, № 3 (1953). [2] Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН, **92**, № 4 (1953). [3] Л. Ландау, Е. Лифшиц, Теория поля, М.—Л., 1948. [4] Б. Росси, К. Грейзен, Взаимодействие космических лучей с веществом, ИЛ, 1948.