Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 1

ФИЗИКА

Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ

ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 25 II 1954)

§ 1. Обозначим через $N_{\mathbf{qp}}$ число частиц в данной точке $\mathbf{q}$ с импульсом $\mathbf{p}$. Тогда функция Гамильтона для системы N частиц с парным взаимодействием

$$H = \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \Phi(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) \tag{1}$$

может быть представлена в виде

$$H = \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} N_{\mathbf{qp}} d\mathbf{q}\, d\mathbf{p} + \frac{1}{2}\int \Phi(|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|) N_{\mathbf{qp}} \cdot N_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'} d\mathbf{q}' d\mathbf{q}\, d\mathbf{p}' d\mathbf{p} - \frac{1}{2}\Phi(0)N. \tag{2}$$

В эквивалентности выражений (1), (2) можно убедиться, если, например, в классическом случае положить

$$N_{\mathbf{qp}} = \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_i)\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_i). \tag{3}$$

В квантовом случае, вследствие корреляции между координатами и импульсами, выражение для $N_{\mathbf{qp}}$ принимает более сложный вид:

$$N_{\mathbf{qp}} = \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \int \delta\left(\mathbf{q} - \frac{1}{2}h\vec{\tau} - \left(\mathbf{q}_i + \frac{1}{2}h\vec{\tau}\right)\right) e^{-i\vec{\tau}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_i)}\, d\vec{\tau}. \tag{4}$$

Как и в классическом случае, интегралы от $N_{\mathbf{qp}}$

$$n_{\mathbf{q}} = \int N_{\mathbf{qp}} d\mathbf{p} = \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_i); \quad n_{\mathbf{p}} = \int N_{\mathbf{qp}} d\mathbf{q} = \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_i) \tag{5}$$

определяют, соответственно, число частиц в данной точке $\mathbf{q}$ и число частиц с данным импульсом $\mathbf{p}$. Подстановка выражения (4) в выражение (2) снова приводит к выражению (1), но уже для операторов. Следует отметить, что представление функции Гамильтона в виде (2) предполагает тождественность частиц, чего нет в представлении (1). Уравнения Гамильтона в рассматриваемом представлении имеют вид:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{p}}{m}; \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \int \Phi(|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|) N_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'} d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' + \left(\frac{\partial \Phi(|\mathbf{q}|)}{\partial \mathbf{q}}\right)_0. \tag{6}$$

§ 2. Связь с методом функции распределения. Сравнивая выражения для среднего значения, например, функции Гамильтона, полученные при помощи функции распределения $f(\mathbf{q}_1 \ldots \mathbf{q}_N; \mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_N)$ и функции распределения $F(\ldots N_{\mathbf{qp}} \ldots)$ чисел $N_{\mathbf{qp}}$, можно получить соотношения между функциями распределения и средними значениями чисел $N_{\mathbf{qp}}$. Например, в классическом случае

$$N f_1(\mathbf{qp}) = \overline{N_{\mathbf{qp}}}, \tag{7}$$

$$N(N-1) f_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \overline{N_{\mathbf{qp}} N_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'}} - \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\overline{N_{\mathbf{qp}}}, \tag{8}$$

где черта означает усреднение при помощи функции $F(\ldots N_{\mathbf{qp}}\ldots)$ по числам $N_{\mathbf{qp}}$. В квантовом случае выражение (8) сложнее и имеет следующий вид:

$$N(N-1)f_2(\mathbf{q},\mathbf{q}',\mathbf{p},\mathbf{p}')=$$
$$=\overline{N_{\mathbf{qp}}N_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'}}-\int\delta\left(\mathbf{q}+\frac{1}{2}h\vec{\tau}-\left(\mathbf{q}'-\frac{1}{2}h\vec{\tau}'\right)\right)\overline{N}\left(\frac{\mathbf{q}-{}^1\!/_2h\vec{\tau}+\mathbf{q}'+{}^1\!/_2h\vec{\tau}'}{2},\vec{\eta}\right)\times$$
$$\times e^{i\vec{\tau}(\vec{\eta}-\mathbf{p})+i\vec{\tau}'(\vec{\eta}-\mathbf{p}')}d\vec{\tau}\,d\vec{\tau}'\,d\vec{\eta}. \qquad (9)$$

При $h\to 0$ оно переходит в выражение (8).

§ 3. Уравнение для $N_{\mathbf{qp}}$.

$$\frac{\partial N_{\mathbf{qp}}}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial N_{\mathbf{qp}}}{\partial\mathbf{q}}-$$
$$-\left\{\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\int\Phi(|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|)N_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'}d\mathbf{q}'d\mathbf{p}'-\left(\frac{\partial\Phi(|\mathbf{q}|)}{\partial\mathbf{q}}\right)_0\right\}\frac{\partial N_{\mathbf{qp}}}{\partial\mathbf{p}}=0 \qquad (10)$$

получается из условия непрерывности и уравнений (6). Соответствующее квантовое уравнение для $N_{\mathbf{qp}}$ может быть получено или из уравнения, связывающего квантовые функции распределения $f_1(\mathbf{q},\mathbf{p})$; $f_2(\mathbf{q},\mathbf{q}',\mathbf{p},\mathbf{p}')$ и выражения (9), или методом квантования, рассмотренным в работах [1, 2]. Оно имеет вид

$$\frac{\partial N_{\mathbf{qp}}}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial N_{\mathbf{qp}}}{\partial\mathbf{q}}=\frac{i}{h}\int\left[\Phi(|h\vec{\tau}|)-\Phi(0)\right]e^{i\vec{\tau}(\vec{\eta}-\mathbf{p})}N_{\mathbf{q}\vec{\eta}}\,d\vec{\tau}\,d\vec{\eta}+$$
$$+\frac{i}{h}\int\left[\Phi\left(\left|\mathbf{q}-\mathbf{q}'-\frac{1}{2}h\vec{\tau}\right|\right)-\right.$$
$$\left.-\Phi\left(\left|\mathbf{q}-\mathbf{q}'+\frac{1}{2}h\vec{\tau}\right|\right)\right]e^{i\vec{\tau}(\vec{\eta}-\mathbf{p})}N_{\mathbf{q}\vec{\eta}}\cdot N_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'}\,d\vec{\tau}\,d\vec{\eta}\,d\mathbf{q}'d\mathbf{p}'=0. \qquad (11)$$

Уравнения (10), (11) по внешнему виду напоминают классическое [3] и квантовое [1] уравнения с самосогласованным полем для функции распределения, однако они различны по существу. Действительно, классическое и квантовое уравнения с самосогласованным полем для функции распределения являются приближенными уравнениями, получаемыми из уравнения для функции распределения системы $f(\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_N,\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_N t)$ в предположении мультипликативности [1] последней или как первое приближение при разложении по малому параметру [4, 5] и служат для статистического описания систем взаимодействующих частиц. В противоположность этому $N_{\mathbf{qp}}$ не является функцией распределения (или функцией, описывающей частицу, размазанную в 6-мерном пространстве [3]). $N_{\mathbf{qp}}$ есть число частиц. Поэтому описание поведения системы при помощи, например, уравнения (10) является динамическим и не включает элементов вероятности. Описание поведения системы при помощи уравнения (11) соответствует квантово-механическому описанию. Для решения статистических задач на основе рассматриваемого представления помимо решений уравнений (10), (11) надо знать функцию распределения чисел $N_{\mathbf{qp}}$. Однако при абсолютном нуле уравнение (11) дает исчерпывающее решение задачи. Поэтому, например, вопрос о возможном спектре возбуждений в рассматриваемой системе может быть решен на основе исследования решений уравнения (11).

§ 4. Спектр элементарных возбуждений. Уравнение (11) имеет приближенное* решение $N_{0,\mathbf{p}}$, соответствующее однородному распределению по координатам. Положим

$$N_{\mathbf{qp}}=N_{0\mathbf{p}}+N_{\mathbf{qp}}^{(1)};\quad N_{\mathbf{qp}}^{(1)}\ll N_{0\mathbf{p}}. \qquad (12)$$

* Мы не учитываем первого члена правой части.

Используя выражение (12), получаем линейное уравнение для $N^{(1)}_{\mathbf{qp}}$, решая которое аналогично тому, как это сделано в работе ([1]), получим выражение, определяющее спектр возможных возбуждений рассматриваемой системы, т. е. связь между энергией E и импульсом $\mathbf{p}$ возбуждения:

$$1 = \nu\left(\frac{\mathbf{p}}{h}\right)\int \frac{N_{0,\mathbf{p}'+{}^1/_2\mathbf{p}} - N_{0,\mathbf{p}'-{}^1/_2\mathbf{p}}}{\mathbf{p}'\,\dfrac{\mathbf{p}}{m} - E}\,d\mathbf{p}', \tag{13}$$

где

$$\nu\left(\frac{\mathbf{p}}{h}\right) = \int \Phi(|\mathbf{q}|)\,e^{i\mathbf{pq}/h}\,d\mathbf{q}.$$

Для случая статистики Бозе $N_{0\mathbf{p}} = n_0\,\delta(\mathbf{p})$, тогда из (13) получим выражение для спектра

$$E^2 = \frac{\nu(\mathbf{p}/h)\,n_0}{m}\,\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{p}^4}{4m^2}, \tag{14}$$

совпадающее с выражением, полученным Н. Н. Боголюбовым в работе по сверхтекучести ([6, 7]) путем применения теории возмущений в методе вторичного квантования.

Для систем, подчиняющихся статистике Ферми, $N_{0,\mathbf{p}} = 2/(2\pi h)^3$ при $p \leqslant p_0$; $N_{0,\mathbf{p}} = 0$ при $p > p_0$. При этом из выражения (13) находим спектр возбуждений для фермиевской системы

$$\frac{2p_0^2}{3mn_0\,\nu\left(\dfrac{\mathbf{p}}{h}\right)} = -1 + \frac{m^2}{2p_0p^3}\left\{\left[\left(E + \frac{p^2}{2m}\right)^2 - \left(\frac{p_0p}{m}\right)^2\right]\ln\frac{E + (p_0 + {}^1/_2p)\,p/m}{E - (p_0 - {}^1/_2p)\,p/m} - \right.$$
$$\left. - \left[\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)^2 - \left(\frac{p_0p}{m}\right)^2\right]\ln\frac{E + (p_0 - {}^1/_2p)\,p/m}{E - (p_0 + {}^1/_2p)\,p/m}\right\}. \tag{15}$$

Выражение (15) представляет обобщение результатов работы ([8]), в которой методом вторичного квантования исследован спектр фермиевской системы в одномерном случае, а также работы ([9]), в которой спектр возбуждений фермиевской системы исследуется методом «лишних переменных».

Для длинных волн из выражения (15) получаем следующее выражение для спектра фермиевской системы:

$$E^2 = \frac{n_0\nu(\mathbf{p}/h)}{m}\,p^2 + \frac{3}{5}\,\frac{p_0^2}{m^2}\,p^2 + \ldots \tag{16}$$

При отсутствии взаимодействия ($\nu(\mathbf{p}/h) \to 0$) из выражения следует возможность существования сразу пары возбуждений в фермиевской системе, энергия которых определяется выражением

$$E_1 = \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m}, \quad p_1 > p_0; \qquad E_2 = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m}, \quad p_2 < p_0, \tag{17}$$

где $p_1 = p_0 + p$ и $p_2 = p_0 - p$.

Таким образом, выражение (16) определяет возбуждения бозевского типа, а выражение (17) — возбуждения фермиевского типа в системе взаимодействующих частиц, подчиняющихся статистике Ферми.

Отметим, что выражение (13) для спектра возможных возбуждений было ранее получено автором настоящей статьи совместно с В. П. Силиным ([1]) путем исследования решения квантового кинетического уравнения с самосогласованным полем. Однако в указанной работе оставался неясным вопрос о степени применимости исходного уравнения. В настоящей работе этот вопрос отпадает.

§ 5. Связь с методом вторичного квантования. В квантовом случае можно представить $N_{\mathbf{qp}}$ в виде:

$$N_{\mathbf{qp}} = \int \psi^{+}\left(\mathbf{q} - \frac{1}{2} h\vec{\tau}\right) \psi\left(\mathbf{q} + \frac{1}{2} h\vec{\tau}\right) e^{-i\vec{\tau}\mathbf{p}}\, d\vec{\tau} \tag{18}$$

или

$$N_{\mathbf{qp}} = \int \varphi^{+}\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} h\vec{\theta}\right) \varphi\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2} h\vec{\theta}\right) e^{-i\vec{\theta}\mathbf{q}}\, d\vec{\theta}, \tag{19}$$

откуда

$$n_{\mathbf{q}} = \psi^{+}(\mathbf{q})\psi(\mathbf{q}), \quad n_{\mathbf{p}} = \varphi^{+}(\mathbf{p})\varphi(\mathbf{p}).$$

Если подставить выражение (9) в функцию Гамильтона (2), то получим выражение для функции Гамильтона в представлении вторичного квантования

$$H = \int \psi^{+} \Delta_{\mathbf{q}} \psi\, d\mathbf{q} + \frac{1}{2} \int \psi^{+}(\mathbf{q}) \psi^{+}(\mathbf{q}') \Phi(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|) \psi(\mathbf{q}') \psi(\mathbf{q})\, d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \tag{20}$$

при условии, что ψ^{+} и ψ являются операторами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$\psi(\mathbf{q})\psi^{+}(\mathbf{q}') \pm \psi^{+}(\mathbf{q}')\psi(\mathbf{q}) = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}').$$

Подобным же образом, подставляя в уравнение (11) выражение (9) для $N_{\mathbf{qp}}$, получим уравнения для операторов ψ^{+} и ψ.

Одно из преимуществ рассматриваемого метода заключается в том, что в нем мы имеем дело с числами, а не с операторами. Для $N_{\mathbf{qp}}$ можно написать перестановочное соотношение. Оно имеет следующий вид:

$$N_{\mathbf{q}_1\mathbf{p}_1} \cdot N_{\mathbf{q}_2\mathbf{p}_2} - \int \delta\left(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 + \frac{1}{2} h(\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2)\right) N\left(\frac{\mathbf{q}_1 - {}^1/_2\, h\vec{\tau}_1 + \mathbf{q}_2 + {}^1/_2\, h\vec{\tau}_2}{2}, \vec{\eta}\right) \times$$

$$\times\, e^{-i\vec{\tau}_1(\vec{\eta} - \mathbf{p}_1) - i\vec{\tau}_2(\vec{\eta} - \mathbf{p}_2)}\, d\vec{\tau}_1 d\vec{\tau}_2 d\vec{\eta} =$$

$$= N_{\mathbf{q}_2\mathbf{p}_2} \cdot N_{\mathbf{q}_1\mathbf{p}_1} - \int \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1 + {}^1/_2\, h(\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2)) N\left(\frac{\mathbf{q}_1 + {}^1/_2\, h\vec{\tau}_1 + \mathbf{q}_2 - {}^1/_2\, h\vec{\tau}_2}{2}, \vec{\eta}\right) \times$$

$$\times\, e^{-i\vec{\tau}_1(\vec{\eta} - \mathbf{p}_1) - i\vec{\tau}_2(\vec{\eta} - \mathbf{p}_2)}\, d\vec{\tau}_1 d\vec{\tau}_2 d\vec{\eta}$$

и выражает лишь тот факт, что бинарная функция не меняется при перестановке частиц, т. е. при $q_1 \rightleftarrows q_2$, $p_1 \rightleftarrows p_2$. Уравнение (11) имеет одинаковый вид как для случая статистики Бозе, так и для случая статистики Ферми. Различие между статистиками выражается лишь в характере решений уравнения (11).

Рассматриваемый метод применим и для случая взаимодействия более общего типа, чем рассмотренный выше,— например, для электродинамического.

Московский авиационный технологический институт

Поступило 15 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Л. Климонтович. В. П. Силин, ЖЭТФ, **23**, 151 (1952); ДАН, **82**, 361 (1952). [2] Ю. Л. Климонтович, ДАН, **87**, 927 (1952). [3] А. А. Власов, Теория многих частиц, М., 1950. [4] Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамический теории в статистической физике, М., 1946. [5] Н. Н. Боголюбов, К. П. Гуров, ЖЭТФ, **17**, 614 (1947). [6] Н. Н. Боголюбов, Лекціі з квантовоі статистики, Киів, 1949. [7] Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ., **11**, 77 (1947). [8] S. Tomonoga, Progr. Theor. Phys., **5**, 544 (1950). [9] Д. Н. Зубарев, ЖЭТФ, **25**, 549 (1953).