

Д. Д. ИВАНЕНКО и Д. Ф. КУРДГЕЛАИДЗЕ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕЗОДИНАМИКИ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 27 II 1954)

§ 1. Нелинейный лагранжиан нейтрального мезонного поля.

1) Как известно, учет вакуума, или, более наглядно, взаимного превращения частиц и полей приводит к нелинейному обобщению уравнений всех полей (1). Нелинейный добавок к основному лагранжиану наиболее просто найти в случае слабого и слабо меняющегося поля. Например, для скалярного поля, учитывая вакуум нуклонов и применяя метод собственного времени, использованный с успехом для определения нелинейности в электромагнитном поле, получим для нелинейной части лагранжиана

$$L' = L'_1 + L'_2, \quad (1)$$

где

$$L'_1 = -\frac{g}{4\pi^2} M_0^3 \left[-\frac{1}{S_0 M_0^2} + 1 + \ln \frac{1}{\gamma S_0 M_0^2} \right] \Phi - \frac{g^3}{4\pi^2 (\hbar c)^2} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{1}{\gamma S_0 M_0^2} \right] \Phi^3 - \dots; \quad (2)$$

$$L'_2 = -\frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{g^2}{\hbar c} \right) M_0^2 \left[-\frac{1}{S_0 M_0^2} + 1 + \ln \frac{1}{\gamma S_0 M_0^2} \right] \Phi^2 - \\ - \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{g^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{1}{\hbar c} \left[\ln \frac{1}{\gamma S_0 M_0^2} \right] \Phi^4 - \dots; \quad M_0 = \frac{M}{\hbar c}. \quad (3)$$

Аналогично для псевдоскалярного поля имеем $L' = L'_2$ (2).

2) Для вычисления нелинейных добавок в лагранжиане 4-го порядка при наличии нелинейностей в производных

$$L^{(4)} = \alpha \varphi^4 + \gamma \varphi^2 \varphi_\mu^2 + \beta \varphi_\mu^2 \varphi_\mu^2, \quad \varphi_\mu \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}, \quad (4)$$

целесообразно использовать другой метод: сравнение двух матричных элементов, полученных один раз при помощи линейного, а другой раз — нелинейного рассмотрения какого-либо подходящего процесса, например, рассеяния мезона на мезоне, очевидно, аналогичного рассеянию света на свете (эффект 4-го порядка).

Нелинейный матричный элемент можно получить из (4), образуя плотность гамильтониана как 44-компоненту тензора энергии $T_{\mu\nu}$ и рассматривая волновые функции как подчиняющиеся в нулевом приближении линейной квантовой теории поля.

Для эффекта 4-го порядка имеем:

$$U_{\varphi=0}^{(4)} = \{2 \times 16 \beta K^4 + 16(-\gamma + 6k_0^2 \beta) K^2 + (8 \gamma k_0^2 - 24 \beta k_0^4 - 24 \alpha)\} L^{-3} \varphi^4(x), \quad (5)$$

где k_0, K — масса и энергия мезона, ϑ — угол рассеяния, $\varphi(k)$ — Фурье-компонента мезонного поля.

Возьмем теперь за основу известную энергию взаимодействия нуклона с мезоном $V = g \Gamma \varphi$, где Γ — матрицы, отвечающие скалярному либо псевдоскалярному случаю, и сравним $U^{(4)}$ с матричным элементом того же процесса, полученным согласно обычной теории промежуточных состояний по методу возмущений*

$$H^{(4)} = \frac{1}{16 \pi^2} \frac{g^4}{(\hbar c)^3} \left\{ 24 \left[\ln \frac{x^2}{\gamma_0} - \frac{5}{6} (1 + \varepsilon) \right] + \frac{32}{5} \left(\frac{k}{M_0} \right)^2 - 0,3 \left(\frac{k}{M_0} \right)^4 \right\} L^{-3} \varphi^4(k), \quad (6)$$

где $x^2 \equiv \frac{p_{\max}^2}{M^2}$; $M_0 = \frac{M}{\hbar c}$; $k_0 \equiv \frac{\mu}{\hbar c}$; $\gamma_0 \approx 1,85$; $\varepsilon = 1$ в случае скалярного поля; $\varepsilon = -1$ в случае псевдоскалярного поля.

Для выражения $H^{(4)} \sim Z/N$ используется разложение

$$\frac{1}{N} = f_0 + f_2 \left(\frac{K}{M_0} \right)^2 + f_4 \left(\frac{K}{M_0} \right)^4 + \dots;$$

для Z берется нулевой член разложения, причем разложение ведется для области $M_0^2 > k^2 > k_0^2$, т. е. $K^2 \cong k^2 < M_0^2$, а для коэффициентов f_j подставляется значение, полученное ранее в квантовой электродинамике (4); имеем в совместной записи для скалярного ($\varepsilon = 1$) и псевдоскалярного ($\varepsilon = -1$) случаев:

$$L^{(4)} = - \frac{1}{16 \pi^2} \frac{g^4}{(\hbar c)^3} \left\{ \left[\ln \frac{x^2}{\gamma_0} - \frac{5}{6} (1 + \varepsilon) + \left(\frac{2}{15} \right) \left(\frac{k_0}{M_0} \right)^2 + \left(\frac{0,3}{32} \right) \left(\frac{k_0}{M_0} \right)^4 \right] \varphi^4(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{M_0^2} \left[\frac{2}{5} + \frac{1,8}{32} \left(\frac{k_0}{M_0} \right)^2 \right] \varphi^2 \varphi_\mu^2 + \dots \right\}. \quad (7)$$

Отметим, что в лагранжиане каждый последующий член индуцирует в предыдущем дополнительную поправку в коэффициенте порядка $\left(\frac{k_0}{M_0} \right)^2$ или $\left(\frac{k_0}{M_0} \right)^4$, соответственно (5). Таким образом, в случае отбрасывания членов с производными мы вновь воспроизводим другим путем результат для выражения нелинейного лагранжиана, полученный ранее для псевдоскалярного поля путем учета вакуума нуклеонов (2).

3) Отметим, что нелинейный лагранжиан мезодинамики можно вывести также из инвариантного соотношения для матрицы столкновения (6)

$$S^{(4)} = \frac{i}{\hbar c} \int L^{(4)}(x) (dx). \quad (8)$$

Записывая $S^{(4)}$ согласно методу Фейнмана — Дайсона, переходя к системе центра масс и применяя ряд преобразований, получим из (8):

$$L^{(4)} = - \frac{1}{16 \pi^2} \frac{g^4}{(\hbar c)^3} \{ \alpha' \varphi^4 + \gamma' \varphi^2 \varphi_\mu^2 + \beta' \varphi_\mu^2 \varphi_\mu^2 \}, \quad (9)$$

где

$$\alpha' = \frac{8 \times 6 \times 4}{i 4!} \int_0^1 x (1-x) dx \left\{ [I_4^4 + 2(2\varepsilon + 1) M_0^2 I_4^2 + M_0^4 I_4^0]_x + \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 dy [I_4^4 + 2(2\varepsilon + 1) M_0^2 I_4^2 + M_0^4 I_4^0]_{xy} \right\}; \quad (10)$$

* Заметим, что, применяя этот метод в проблеме рассеяния света на свете через заряженные мезоны, один из нас пришел к результатам, практически совпадающим с выводами из нелинейного лагранжиана, полученного методом собственного времени (3), и смог также при этом разделить вклады, соответствующие в данном процессе 2-му, 3-му и 4-му порядкам.

$$I_m^n \equiv \int \frac{p^n d^4 p}{[p^2 + \Delta]^m}; \quad q^2 = k_\mu^2 = K^2 - k_n^2;$$

$$\Delta = \begin{cases} \Delta(x) = M_0^2 t(x) = M_0^2 \left[1 - \left(\frac{q}{M_0} \right)^2 (1 - \eta^2) \right], & \eta \equiv 1 - 2x; \\ \Delta(xy) = M_0^2 t(x, y) = M_0^2 \left\{ 1 - \left(\frac{q}{M_0} \right)^2 [(1 + 2xy) - (2x\eta - 1)] \right\}, & \eta \equiv 1 - 2y. \end{cases} \quad (11)$$

Значки $\{ \}_x$ и $\{ \}_{xy}$ указывают на $\Delta(x)$ или $\Delta(x, y)$, соответственно; коэффициенты β', γ' выражаются аналогичным образом. Когда $t(x) \cong t(x, y) \cong 1$ (т. е. $\left(\frac{q}{M_0} \right)^2 \cong 0$), получим:

$$L^{(4)} \doteq - \frac{1}{16 \pi^2} \frac{g^4}{(\hbar c)^3} \left\{ \left[\ln \frac{x^2}{\gamma_0} - \frac{4}{3} (1 + \varepsilon) \right] \varphi^4(x) + \frac{2}{5} \frac{1}{M_0^2} \varphi^2(x) \varphi_\mu^2(x) \dots \right\}. \quad (12)$$

Коэффициент при $\varphi_\mu^2(x) \varphi_\mu^2(x)$ будет порядка 0,01.

Таким образом мы опять воспроизводим результаты, полученные ранее как методом сравнения двух матричных элементов, так и подсчетом вакуумного эффекта; незначительные отклонения в некоторых числовых коэффициентах происходят от использования разных степеней приближения.

Аналогичным путем, рассматривая собственно-энергетические диаграммы при наличии нелинейности в производной, получим соответствующие добавки к линейному лагранжиану, причем коэффициент при производной оказывается расходящимся логарифмически.

§ 2. Решения нелинейного уравнения мезодинамики. Мы укажем здесь по пунктам некоторые свойства и решения основного нелинейного уравнения.

1) Рассмотрим основное уравнение

$$(\square - k_0^2 - \lambda \varphi^2) \varphi = 0. \quad (13)$$

Оно удовлетворяет характерному для многих нелинейных уравнений (типа Лэна — Эмдена, функций Вейерштрасса и т. д.) свойству подобия

$$\varphi(k_0^2, \lambda, x_\mu) = \left(\frac{\lambda' k_0^2}{\lambda k_0'^2} \right)^{1/2} \varphi \left(k_0'^2, \lambda', \left(\frac{k_0^2}{k_0'^2} \right)^{1/2} x_\mu \right), \quad (14)$$

где $k_0'^2$ и λ' — произвольные числа. В частности, отсюда следует, что $\varphi(k_0^2, \lambda, x_\mu) = \sqrt{N} \varphi(k_0^2, N\lambda, x_\mu)$, и для энергии поля получим

$$H[\varphi(\lambda)] = NH[\varphi(N\lambda)], \quad (15)$$

где N — произвольное число.

2) Уравнение (13) имеет конечные и непрерывные решения волнового типа во всей области изменения переменного $-\infty < x_\mu < \infty$ при соответствующих значениях постоянных; например, его решениями являются следующие эллиптические функции:

$$\varphi = \varphi_0 \operatorname{cn}(\omega t - kr + c); \quad \omega^2 = k^2 + k_0^2 + \lambda \varphi_0^2; \quad k_1^2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda \varphi_0^2}{k_0^2 + \lambda \varphi_0^2}, \quad (16)$$

а также аналогичные решения вида $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{dn} u$, где k_1 — главный модуль эллиптических функций. Для действительных параметров, когда $u^2 > 0$ и $0 < k_1^2 < 1$, имеем ограниченные решения.

3) Согласно формуле (16), нелинейное состояние можно рассматривать как своеобразную суперпозицию линейных состояний с опре-

деленными весами $A_{n+1}/A_n < 1$ и массами, являющимися функциями целого числа

$$k_{0,n} \simeq (1 + 2n) k_0 B(\lambda); \quad B(\lambda) \simeq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

4) Рассмотрим теперь статическое уравнение поля

$$(-\Delta + k_0^2) \varphi + \lambda_1 \varphi^3 + \lambda_2 \varphi^5 + \dots = -\rho(r). \quad (18)$$

Если $|\Delta \varphi^n| \ll k_0^2 \varphi^n$, то, дополняя левую часть уравнения (18) выражением $-\frac{1}{k_0^2} \Delta (\lambda_1 \varphi^3 + \lambda_2 \varphi^5 + \dots)$, получим

$$(-\Delta + k_0^2) \Phi(r) = -\rho(r), \quad (19)$$

где $\Phi(r) = \varphi + \left(\frac{\lambda_1}{k_0^2}\right) \varphi^3 + \left(\frac{\lambda_2}{k_0^2}\right) \varphi^5 + \dots = + \int G(r r') \rho(r') (dr')$,

$$G(r r') = \frac{-\delta(r - r')}{-\Delta + k_0^2} = -\frac{e^{-k_0(r-r')}}{4\pi|r-r'|}. \quad (20)$$

Таким образом мы получим точное решение (20) приближенного уравнения (19). Решая алгебраическое уравнение (20) методом последовательных приближений, получим, в частности, для $\rho(r) = 4\pi \delta(r)$

$$\varphi_0 = -\frac{e^{-k_0 r}}{r}; \quad \varphi_1 = -\frac{e^{-k_0 r}}{r} + \left(\frac{\lambda_1}{k_0^2}\right) \frac{e^{-3k_0 r}}{r^3} + \left(\frac{\lambda_2}{k_0^2}\right) \frac{e^{-5k_0 r}}{r^5} + \dots \quad (21)$$

С другой стороны, считая $\lambda \varphi^2 < k_0^2$ и обозначая $k_0^2 + \lambda \varphi^2 \equiv \bar{k}_0^2$, получим для $\rho(r) = 4\pi \delta(r)$:

$$\varphi = -\frac{1}{r} \exp\left\{-\bar{k}_0 r \left(1 + \frac{\lambda \varphi^2}{k_0^2}\right)^{1/2}\right\} \approx -\frac{e^{-k_0 r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\lambda}{2k_0^2}\right)^n \varphi^{2n}.$$

Решая снова это алгебраическое уравнение методом последовательных приближений, получим:

$$\varphi_0 = -\frac{e^{-k_0 r}}{r}; \quad \varphi_1 \approx -\frac{e^{-k_0 r}}{r} + \left(\frac{\lambda}{2k_0^2}\right) \frac{e^{-3k_0 r}}{r^3} - \dots$$

Подобный анализ решений нелинейного уравнения мезодинамики* приобретает значительный интерес в связи с тем, что здесь мы получаем добавок к обычному юкавскому притяжению нуклеонов, соответствующий отталкиванию нуклеонов на близких расстояниях. Иначе говоря, мы приходим к результатам, несколько аналогичным полученным нами ранее из теории переноса взаимодействия несколькими мезонами⁽⁷⁾. Подобное отталкивание между нуклеонами требуется как разнообразными эмпирическими данными из рассеяния нуклеонов⁽⁸⁾, так и требованием обеспечения устойчивости ядер⁽⁹⁾. Так как знак λ соответствует отталкиванию мезонов, то тем самым возникает возможность качественного объяснения требуемых опытами по рассеянию π -мезонов на нуклеонах фактов — поскольку нуклеоны окружены мезонным облаком.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Соколов, Д. Иваненко, Квантовая теория поля, 1952. ² J. Schwinger, Phys. Rev., **82**, 664 (1951); J. Malenka, *ibid.*, **85**, 686 (1952). ³ V. Weisskopf, Kgl. Danske Videnskab. Mat. Fys., **14**, 6 (1936). ⁴ Н. Euler, Ann. d. Phys., **26**, 398 (1936). ⁵ Д. Иваненко, Д. Курдгеладзе, С. Ларин, ДАН, **88**, 245 (1953). ⁶ R. Karplus, M. Neuman, Phys. Rev., **80**, 380 (1950). ⁷ Д. Иваненко, В. Лебедев, ДАН, **80**, 357 (1951). ⁸ R. Jastrow, Phys. Rev., **81**, 165, 636 (1951). ⁹ Д. Иваненко, Н. Колесников, ДАН, **89**, № 2 (1953).

* См. также⁽⁵⁾, где рассмотрено уравнение без источника.