

А. Л. ХЕЙН

**НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ПРИТОК ЖИДКОСТИ И ГАЗА
К НЕСОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ**

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 5 III 1954)

В нашей заметке (1) приводится следующее выражение для изображения Φ_λ потенциала массовой скорости Φ при неустановившейся фильтрации жидкости и газа к скважине с меридионально-симметричной конструкцией забоя, дренирующей горизонтальный однородный и бесконечный пласт с непроницаемой подошвой и кровлей:

$$\Phi_\lambda(r, z, \alpha) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{n,m} \Phi_{\lambda, n, m}(r) \cos \frac{m\pi}{h} z \cos n\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{n,m} \left\{ B_{n,m} K_n \left[\left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 + \frac{\lambda}{a} \right]^{1/2} r + \delta_{n,m} \frac{\Phi_H}{\lambda} \right\} \cos \frac{m\pi}{h} z \cos n\alpha, \quad (1)$$

где $\varepsilon_{0,0} = 1/2$; $\varepsilon_{0,m} = \varepsilon_{n,0} = 1$; $\varepsilon_{n,m} = 2$; $\delta_{0,0} = 4$; $\delta_{n,m} = 0$ при $n \neq 0$ или $m \neq 0$; r, z, α — цилиндрические координаты произвольной точки в пласте при условии, что ось z совмещена с осью скважины (начало координат на подошве пласта), а начальная плоскость отсчета угла α является плоскостью меридиональной симметрии забоя скважины; r_c — радиус скважины; λ — комплексная переменная; K_n — цилиндрическая функция от мнимого аргумента 2-го рода n -го порядка; h — мощность пласта; $B_{n,m}$ — постоянные коэффициенты; Φ_H — начальный потенциал в пласте при $t = 0$; $a = \kappa$ (1) для упругой жидкости и $a = \kappa$ для газа (1).

$$\Phi_{\lambda, n, m}(r) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \int_0^{2\pi} \int_0^h \Phi(r; z; \alpha; t) \cos \frac{m\pi}{h} z \cos n\alpha dz d\alpha. \quad (2)$$

Рассмотрим приток при постоянном массовом отборе флюида из скважины. По условиям задачи:

$$\Phi = \Phi_H = \text{const} \quad \text{при } t = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \varphi(z; \alpha) \quad \text{при } r = r_c \text{ и } t > 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h \text{ и } z = 0. \quad (5)$$

Найдя из (1) и (2), в соответствии с граничным условием (4), коэффициенты $B_{n,m}$ и подставив затем их выражения в (1), получим

$$\Phi_\lambda(r; z; \alpha) = \frac{\Phi_H}{\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{n,0} \frac{K_n \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{1/2} r}{\lambda \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{1/2} K'_n \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{1/2} r_c} \bar{\gamma}_{(0,0)}^c +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{n,m} \bar{\gamma}_{(n,m)}^c \frac{K_n \left[\left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 + \frac{\lambda}{a} \right]^{1/2} r}{\lambda \left[\left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 + \frac{\lambda}{a} \right]^{1/2} K'_n \left[\left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 + \frac{\lambda}{a} \right]^{1/2} r_c} \cos \frac{m\pi}{h} z \cos n\alpha,$$

где $\varepsilon_{0,0} = 1/4$; $\varepsilon_{n,0} = 1/2$; $\varepsilon_{0,m} = 1$; $\varepsilon_{n,m} = 2$;

$$\bar{\gamma}_{l(n,m)}^c = \frac{2}{\pi h} \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=r_c} \cos \frac{m\pi}{h} z \cos n\alpha dz d\alpha. \quad (7)$$

По теореме обращения Римана — Меллина:

$$\begin{aligned} & \Phi(r; z; \alpha; t_2) - \Phi(r; z; \alpha; t_1) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{n,0} \bar{\gamma}_{l(n,0)}^c \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{K_n \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{1/2} (e^{\lambda t_2} - e^{\lambda t_1})}{\lambda \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{1/2} K_n \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{1/2} r_c} d\lambda + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_{n,m} \bar{\gamma}_{l(n,m)}^c \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{(e^{\lambda t_2} - e^{\lambda t_1}) K_n \left[\left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 + \frac{\lambda}{a} \right]^{1/2} r}{\lambda \left[\left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 + \frac{\lambda}{a} \right]^{1/2} K_n \left[\left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 + \frac{\lambda}{a} \right]^{1/2} r_c} \times \\ & \times d\lambda \cos \frac{m\pi}{h} z \cos n\alpha, \quad (8) \end{aligned}$$

где t_1 и t_2 — произвольные моменты времени t .

Обозначим подынтегральную функцию в одинарной сумме выражения (8) $\psi_{n,0}(\lambda; r)$, а в двойной сумме $\psi_{n,m}(\lambda; r)$.

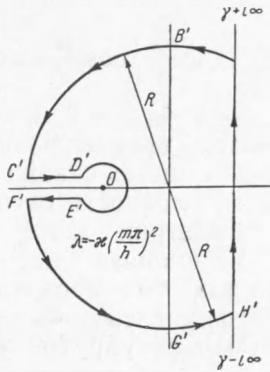


Рис. 1

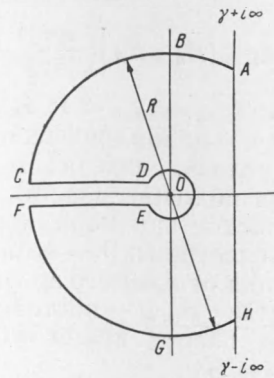


Рис. 2

Функция $\psi_{n,m}(\lambda; r)$ имеет точку разветвления $\lambda = -a(m\pi/h)^2$ и одинарный полюс $\lambda = 0$. Функция $\psi_{n,0}(\lambda; r)$ имеет точку разветвления $\lambda = 0$.

Для нахождения интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \psi_{n,m}(\lambda; r) d\lambda$ воспользуемся контуром $A'B'C'D'E'F'G'H'$ рис. 1, и для нахождения интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \psi_{n,0}(\lambda; r) d\lambda$ контуром $ABCDEF GH$ рис. 2.

По теореме Коши:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \psi_{n,m}(\lambda; r) d\lambda = \\ & = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_{A'B'C'D'E'F'G'H'} \psi_{n,m}(\lambda; r) d\lambda + \text{res}_{\lambda=0} \psi_{n,m}(\lambda; r); \quad (9) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \psi_{n,0}(\lambda; r) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_{ABCDEF GH} \psi_{n,0}(\lambda; r) d\lambda. \quad (10)$$

Можно показать, что функции $\psi_{n,m}(\lambda; r)e^{-\lambda t}$ и $\psi_{n,0}(\lambda; r)e^{-\lambda t}$ удовлетворяют необходимым условиям леммы Жордана, и поэтому интегралы по дугам $A'B'C'$ и $F'G'H'$ от функции $\psi_{n,m}(\lambda; r)$ и по дугам ABC и FGH от функции $\psi_{n,0}(\lambda; r)$ стремятся к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Выберем точку разветвления O' на рис. 1 за начало отсчета векторов $\rho e^{i\varphi}$ (где φ — угол, отсчитываемый от положительного направления вещественной оси). Тогда на верхнем берегу разреза $C'D'$ $\lambda = [\rho + a(m\pi/h)^2]e^{i\pi}$ и $d\lambda = d\rho e^{i\pi}$, а на нижнем берегу разреза $F'E'$ $\lambda = [\rho + a(m\pi/h)^2]e^{-i\pi}$ и $d\lambda = d\rho e^{-i\pi}$. На окружности $D'E'$ $\lambda = \rho e^{i\varphi} - a(m\pi/h)^2$ и $d\lambda = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$. Вставляя эти выражения для λ в подынтегральную функцию $\psi_{n,m}(\lambda; r)$, замечая, что $\text{res}_{\lambda=0} \psi_{n,m}(\lambda; r) = 0$ и что интеграл от $\psi_{n,m}(\lambda; r)$ по малой окружности $D'E'$ при стягивании этой окружности к O' также стремится к нулю, получим после проведения интегрирования по обоим берегам разреза:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \psi_{n,m}(\lambda; r) d\lambda = \quad (11)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[e^{-[\rho + a(m\pi/h)^2]t_2} - e^{-[\rho + a(m\pi/h)^2]t_1}] [J_n(\frac{\rho}{a})^{1/2} r Y_n'(\frac{\rho}{a})^{1/2} r_c - J_n'(\frac{\rho}{a})^{1/2} r_c Y_n(\frac{\rho}{a})^{1/2} r]}{(\frac{\rho}{a})^{3/2} [\rho + a(\frac{m\pi}{h})^2]} [J_n'^2(\frac{\rho}{a})^{1/2} r_c + Y_n'^2(\frac{\rho}{a})^{1/2} r_c] d\rho,$$

где J_n и Y_n — цилиндрические функции, соответственно, первого и второго рода n -го порядка. Аналогично:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \psi_{n,0}(\lambda; r) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(e^{-\rho t_2} - e^{-\rho t_1}) [J_n(\frac{\rho}{a})^{1/2} r Y_n'(\frac{\rho}{a})^{1/2} r_c - J_n'(\frac{\rho}{a})^{1/2} r_c Y_n(\frac{\rho}{a})^{1/2} r]}{(\frac{\rho}{a})^{3/2} [J_n'^2(\frac{\rho}{a})^{1/2} r_c + Y_n'^2(\frac{\rho}{a})^{1/2} r_c]} d\rho. \quad (12)$$

Положим в (11) и (12) $(\rho/a)^{1/2} = u$; тогда, согласно (8):

$$\Phi(r; z; \alpha; t_2) - \Phi(r; z; \alpha; t_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,m}}{\pi} \bar{\gamma}_{(n,m)}^c \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{[e^{-at_2[u^2 + (m\pi/h)^2]} - e^{-at_1[u^2 + (m\pi/h)^2}]] [J_n(ur) Y_n'(ur_c) - J_n'(ur_c) Y_n(ur)]}{[u^2 + (\frac{m\pi}{h})^2] [J_n'^2(ur_c) + Y_n'^2(ur_c)]} du \times$$

$$\times \cos \frac{m\pi}{h} z \cos n\alpha, \quad (13)$$

где $\varepsilon_{0,0} = 1/2$; $\varepsilon_{n,0} = 1$; $\varepsilon_{m,0} = 1$; $\varepsilon_{n,m} = 2$.

Так как t_2 и t_1 — произвольные моменты времени, то, полагая в (13) $t_1 = 0$ и учитывая, что $\Phi(r; z; \alpha; 0) = \Phi_n$, получим следующее выраженное в общем виде решение задачи:

$$\Phi(r; z; \alpha; t) = \Phi_n + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{n,m} \bar{\gamma}_{(n,m)}^c \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{[e^{-at[u^2 + (m\pi/h)^2]} - 1] [J_n(ur) Y_n'(ur_c) - J_n'(ur_c) Y_n(ur)]}{[u^2 + (\frac{m\pi}{h})^2] [J_n'^2(ur_c) + Y_n'^2(ur_c)]} du \times$$

$$\times \cos \frac{m\pi}{h} z \cos n\alpha. \quad (14)$$

Полагая в (14) $r = r_c$ и учитывая, что

$$J_n(z) Y_n'(z) - J_n'(z) Y_n(z) = \frac{2}{\pi z}, \quad (15)$$

найдем выражение для потенциала Φ_c на стенке гидродинамически несовершенной скважины:

$$\Phi_c = \Phi_n + \frac{2}{r_c \pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{n,m} \overline{\gamma}_{(n,m)}^c \int_0^{\infty} \frac{e^{-at[u^2 + (m\pi/h)^2]} - 1}{\left[u^2 + \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 \right] [J_n'^2(ur_c) + Y_n'^2(ur_c)]} \frac{du}{u} \times \\ \times \cos \frac{m\pi}{h} z \cos n\alpha. \quad (16)$$

Пользуясь для неустановившегося притока той же вспомогательной расчетной схемой, которой мы пользовались в (3), получим из (16) следующее приближенное выражение для эффективного потенциала на забое скважины $\overline{\Phi}_c$:

$$\overline{\Phi}_c = \Phi_n - \frac{h}{\pi S^2} \frac{\mu}{k} G_c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{n,m} \overline{\gamma}_{(n,m)}^{*c} \int_0^{\infty} \frac{e^{-at[u^2 + (m\pi/h)^2]} - 1}{\left[u^2 + \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 \right] [J_n'^2(ur_c) + Y_n'^2(ur_c)]} \frac{du}{u}, \quad (17)$$

где μ — вязкость; k — проницаемость; G_c — алгебраическое значение массового дебита скважины; S — площадь дренирования пласта:

$$\overline{\gamma}_{n,m}^{*c} = \frac{2}{\pi h} \iint_S \cos \frac{m\pi}{h} z \cos n\alpha \, dz \, d\alpha. \quad (18)$$

Из выражения (14) в качестве частного случая вытекает формула для распределения потенциала Φ в бесконечном пласте, дренируемом скважиной, совершенной по характеру и степени вскрытия пласта:

$$\Phi(r; t) = \Phi_n - \frac{\mu}{2\pi^2 k} \frac{G_c}{r_c h} \int_0^{\infty} \frac{(e^{-au^2t} - 1) [J_0(ur) Y_1(ur_c) - J_1(ur_c) Y_0(ur)]}{u^2 [J_1^2(ur_c) + Y_1^2(ur_c)]} du. \quad (19)$$

Для случая фильтрации газа (19) принимает вид

$$p(r; t) = p_n + \bar{\alpha} \ln \left\{ 1 - \frac{\mu}{k} \frac{p_0 Q_0}{\pi^2 r_c h \bar{\alpha} p_n} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} \frac{(e^{-\bar{\alpha} u^2 t} - 1) [J_0(ur) Y_1(ur_c) - J_1(ur_c) Y_0(ur)]}{u^2 [J_1^2(ur_c) + Y_1^2(ur_c)]} du \right\}, \quad (20)$$

где Q_0 — алгебраическое значение приведенного к давлению p_0 объемного дебита газа.

Для случая фильтрации жидкости (19) принимает вид

$$p(r; t) = p_n - \frac{\mu Q_0}{2k\pi^2 r_c h} \int_0^{\infty} \frac{(e^{-\alpha u^2 t} - 1) [J_0(ur) Y_1(ur_c) - J_1(ur_c) Y_0(ur)]}{u^2 [J_1^2(ur_c) + Y_1^2(ur_c)]} du. \quad (21)$$

Формулы (17), (20) и (21) могут быть использованы для определения параметров пласта по данным испытания скважин.

Поступило
28 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Л. Хейн, ДАН, 95, № 1 (1954). ² И. А. Чарный, Изв. АН СССР, ОТН, № 6 (1951). ³ А. Л. Хейн, ДАН, 91, № 2 (1953).