Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 1

ГИДРАВЛИКА

Н. В. ТЯБИН

РАДИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЫ В ПЛОСКОМ КАПИЛЛЯРЕ

(*Представлено академиком А. И. Некрасовым 23 II 1954*)

Радиальное течение консистентных смазок, являющихся вязко-пластическими средами, осуществляется в лабиринтных уплотнениях подшипниковых узлов. Лабиринтные уплотнения [1] представляют собой сочетание серии последовательно соединенных радиальных и кольцевых щелевых уплотнений. Для оценки эффективности лабиринтных уплотнений необходимо исследовать процесс течения смазки в радиальной щели. Радиальное течение вязкой жидкости в плоской щели было рассмотрено П. Л. Капицей [2], М. Кусаковым и К. Крым [3] и др.

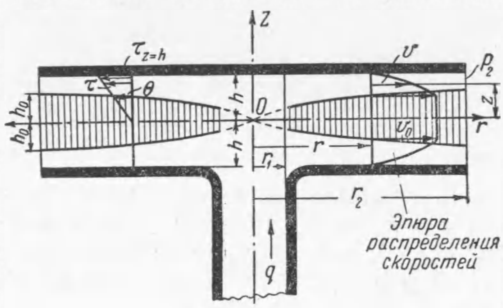

Рис. 1

Рассмотрим сначала течение между неподвижными дисками. Допустим, что радиальное течение вязко-пластической дисперсной системы происходит между двумя плоскими дисками радиусов r_2 под действием разности давлений (см. рис. 1). Ось Oz перпендикулярна дискам, ось Or проходит через середину расстояния $2h$ между дисками и параллельна их поверхности. В центр зазора подается через патрубок среда, которая затем установившимся потоком течет между дисками. Решение задачи проведем на основании общих уравнений течения вязко-пластической среды [4]. Течение радиальное, компоненты скорости запишутся: $v = v_r = v(r, z)$, $v_\varphi = v_z = 0$. Массовые силы равны нулю $F = 0$; рассматривая медленное течение, силами инерции пренебрегаем, следовательно, считаем, что $w_r = v\,\partial v / \partial r = 0$, откуда

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0. \tag{1}$$

Из компонентов тензора предельных напряжений в зоне градиентов скорости $\partial v / \partial z$ действует компонента $\theta_{zr} = \theta = \text{const}$, $\partial\theta_{zr} / \partial z = 0$, $\nabla\theta = 0$.

Тогда уравнения в цилиндрической системе координат будут:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \eta_{\text{пл}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) = 0, \tag{2}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}=0. \tag{4}$$

Следует заметить, что к уравнениям (2), (3), (4) приводят и уравнения течения вязко-пластической среды Генки — Ильюшина ([4], [5]):

$$\rho(F-w)-\nabla p+\eta_{\text{пл}}\nabla\dot{e}_0+2\theta\nabla\frac{\dot{e}_0}{H}=0, \tag{5}$$

$$\dot{e}_V=0. \tag{6}$$

При данных условиях задачи из (6) следует, что $v/r=-\partial v/\partial r$. Учитывая условие (1), получим интенсивность скоростей деформации в виде $H=2|\partial v/\partial z|$ девиатор скоростей, деформаций $\dot{e}=|\partial v/\partial z|$, поэтому $2\theta\nabla\frac{\dot{e}_0}{H}=0$, и уравнения (5) действительно тождественны уравнениям (2) и (3). Из уравнений (3) и (4) следует, что

$$p=f(r),\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}=0;$$

тогда уравнение (2) будет

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{1}{\eta_{\text{пл}}}\frac{\partial p}{\partial r}.$$

Интегрируя, получаем:

$$v=\frac{1}{\eta_{\text{пл}}}\frac{\partial p}{\partial r}\frac{z^2}{2}+C_1z+C_2.$$

Постоянные интегрирования определим из граничных условий: при $z=h$ $v=0$ (среда прилипает к стенке); при $z=h(r)=h_0$ $\partial v/\partial z=0$, это следует из того, что в центре касательное напряжение $\tau_{zr}=0$ и существует зона среды, движущаяся с постоянной скоростью $v_0=v(r, h_0)$. Тогда

$$v=-\frac{\partial p}{\partial r}\frac{1}{\eta_{\text{пл}}}(h-z)\left(\frac{h+z}{2}-h_0\right). \tag{7}$$

В центральной зоне относительного течения слоев в направлении радиуса нет, следовательно, нет и диссипации энергии. Центральное ядро находится в состоянии предельного равновесия, поэтому центральное ядро следует считать состоящим из элементарных бесконечно тонких цилиндриков, двигающихся с уменьшающейся скоростью во все более расширяющейся зоне в направлении Or. В этом случае мы имеем точно такой же характер движения, как и при течении вязкой жидкости на разгонном (начальном) участке в трубе, когда центральное ядро ускоряется как единое целое почти без диссипации энергии.

Определим расход среды, текущей между дисками:

$$q=4\pi rh_0v_0+4\pi r\int_{h_0}^{h}v\,dz=-\frac{4\pi rh^3}{3\eta_{\text{пл}}}\frac{\partial p}{\partial r}\left(1-\frac{3}{2}\frac{h_0}{h}+\frac{h_0^3}{h^3}\right). \tag{8}$$

В уравнениях (7) и (8) неизвестны как $\partial p/\partial r$, так и h_0. Установим связь между ними. Касательное напряжение внутреннего трения

$\tau_{zr} = \theta + \eta_{пл}\, dv/dz$; определяя dv/dz из (7), получим $\tau_{zr} = \theta - \frac{\partial p}{\partial r}(z - h_0)$. Следовательно, τ_{zr} является линейной функцией z (эпюру касательных напряжений см. рис. 1). Поэтому можем записать

$$\frac{\tau_{z=h}}{\theta} = \frac{h}{h_0}, \tag{9}$$

где $\tau_{z=h} = \theta - \frac{\partial p}{\partial r}(h - h_0)$. Решая получающееся из (9) квадратное уравнение относительно h_0, найдем

$$h_0 = -\frac{\theta}{\partial p/\partial r}. \tag{10}$$

Определим h_0. Пренебрегая в уравнении (8) последним членом, т. е. считая, что $q = -\frac{4\pi r}{3\eta_{пл}} \frac{\partial p}{\partial r} a(r)$, где $a(r) = \left(1 - \frac{3}{2}\frac{h_0}{h}\right)h^3$, и подставляя $\frac{\partial p}{\partial r}$ из (10), найдем, что

$$h_0 = \frac{2}{3} h \frac{1}{1 + q\eta_{пл}/2\pi r h^2}. \tag{11}$$

Из уравнения (11) следует, что при $r \to 0$ $h_0 = 0$, при $r \to \infty$ $h_0 = {}^2/_3 h$ (рис. 1). Зная h_0, определяем $a(r)$:

$$a(r) = \frac{q h \eta_{пл}}{2\pi r \theta (1 + q\eta_{пл}/2\pi r \theta h^2)}. \tag{12}$$

Для того, чтобы окончательно определить $v(r, z)$ и q, нужно в уравнении (11) определить q. Из уравнения (4) следует, что $\bar{v}r = f(z)$; применяя это соотношение к средним скоростям, найдем, что $\bar{v}_1 r_1 = \bar{v} r$. Средние скорости определятся:

$$\bar{v}_1 = \frac{q}{4\pi r_1 h}, \tag{13}$$

$$\bar{v} = \frac{q}{4\pi r h}. \tag{14}$$

Найдем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{3\bar{v}\eta_{пл} h}{a(r)} = -\frac{3\eta_{пл} h}{a(r)} \frac{\bar{v}_1 r_1}{r}. \tag{15}$$

Интегрируя последнее уравнение, приняв во внимание (14) и (12), будем иметь:

$$\Delta P = \frac{3\theta}{2h}\left[(r_2 - r_1) + \frac{q\eta_{пл}}{2\pi\theta h^2} \ln\frac{r_2}{r_1}\right] = \frac{3\theta}{2h}\left[(r_2 - r_1) + \frac{2\bar{v} r \eta_{пл}}{\theta h} \ln\frac{r_2}{r_1}\right], \tag{16}$$

где ΔP — разность давлений ($\Delta P = P_1 - P_2$) на радиусах r_1 и r_2 (рис. 1). Подставив в (15) $\bar{v}$ из уравнения (16), $a(r)$ из (12) и q из (14), получим окончательно:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\left[\frac{\Delta P}{r \ln\frac{r_2}{r_1}} + \frac{3\theta}{h}\left(\frac{r_2 - r_1}{r \ln\frac{r_2}{r_1}} - 1\right)\right],$$

$$h_0 = \frac{2}{3} h \frac{1}{1 + \frac{2\Delta P h - (r_2 - r_1)3\theta}{3\theta r \ln(r_2/r_1)}}.$$

Зная $\partial p / \partial r$ и h_0, окончательно определяем q и v из уравнений (7) и (8).

Потеря давления в радиальном зазоре лабиринтного уплотнения при неподвижных дисках определится:

$$\Delta p = \frac{3}{8} \frac{q \eta_{пл} \ln \frac{r_2}{r_1}}{h^3} + \frac{3\theta (r_2 - r_1)}{2h}.$$

Поступило
9 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Д. Бейзельман, Б. В. Цыпкин, Подшипники качения, справочник, М., 1951. [2] П. Капица, ДАН, 18, 21 (1938). [3] М. Кусаков, К. Крым, ЖЭТФ, 16, 3, 266 (1946). [4] Н. В. Тябин, Колл. журн., 13, 1 (1951); ДАН, 92, № 1 (1953). [5] А. А. Ильюшин, Тр. конф. по пласт. деформациям, 1936; Уч. зап. МГУ, в. 39 1940).