Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 2

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР И. Я. ПОМЕРАНЧУК

ПОЛУФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБРАЗОВАНИЯ π-МЕЗОННЫХ ПАР γ-КВАНТАМИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЙ

При больших энергиях γ-квантов возникает возможность построения полуфеноменологической теории образования π-мезонных пар γ-квантами, аналогичной теории испускания γ-квантов π-мезонами, развитой в [1]. Дело в том, что ядра (включая и протоны) можно считать черными шариками по отношению к π-мезонам большой энергии. Это является следствием интенсивного взаимодействия между π-мезонами и ядрами. Используя «черноту» нуклонов, можно определить волновую функцию ψ π-мезонов вне ядра как сумму плоской и диффрагированной волн. Если рассматривать процессы рождения пар, при которых углы между π^+, π^- и квантом малы, то вероятность такого акта полностью определяется волновой функцией ψ π-мезона вне ядра (отметим, что только такие углы практически важны). Таким образом, можно все точно сосчитать, за исключением одного множителя (см. (13)), который включает в себя взаимодействие π^+ и π^-, а также отражает влияние конечных размеров π-частиц (форм-фактор). Сравнение выводов теории с экспериментом позволит определить этот множитель и тем самым получить ценные для теории сведения о взаимодействии π^+- и π^--частиц и об их размерах.

Матричный элемент процесса: $\gamma \to \pi^+ + \pi^-$ имеет вид*:

$$M = e\sqrt{\frac{2\pi}{f}}\,\frac{1}{i}\int[\psi_1^*(\mathbf{j}\nabla\psi_2^*) - \psi_2^*(\mathbf{j}\nabla\psi_1^*)]\,e^{i\mathbf{f}\mathbf{r}}\,d\tau, \qquad (1)$$

$\mathbf{j}$ — поляризация кванта.

ψ_1 и ψ_2 являются суммой плоской и сходящейся волн [2]

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2E_1}}\left[e^{i\mathbf{p}_1\mathbf{r}} + \frac{p_1}{2\pi i}\int\frac{e^{-ip_1|\mathbf{r}-\mathbf{s}_1|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}_1|}\,ds_1\right] = \frac{1}{\sqrt{2E_1}}[e^{i\mathbf{p}_1\mathbf{r}} + \Phi_1]. \qquad (2)$$

Аналогично ψ_2.

Интегрирование по $\mathbf{s}_1$ ($\mathbf{s}_2$) производится по кругу радиуса R, перпендикулярному $\mathbf{p}_1$ ($\mathbf{p}_2$) и проходящему, например, через центр нуклона (ядра); E_1 — энергия π^+; E_2 — энергия π^-; πR^2 равно сечению всех неупругих столкновений π-мезона с ядром (большинсто из них приводит к интенсивным «звездам», сопровождающимся взрывными ливнями типа Ферми [3] — Ландау [4]).

Рассмотрим сперва часть (1), включающую Φ_1 и Φ_2. Запишем эти функции следующим образом:

$$\Phi_1 = \frac{p_1}{4\pi^3 i}\iint\frac{e^{-i(\mathbf{q},\,\mathbf{r}_\perp-\mathbf{s}_1)}}{q^2 - p_1^2 + i\varepsilon}\,d\mathbf{q}\,d\mathbf{s}_1, \quad \varepsilon\to 0 \qquad (3)$$

(соответственно Φ_2).

* $\hbar = c = 1$.

Получающееся выражение имеет вид:

$$-\frac{e}{i}\frac{p_1p_2}{\sqrt{2^2E_1E_2}}\frac{1}{16\pi^6}\int d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2\, d\mathbf{q}\, d\mathbf{q}'\, d\tau\, e^{i(\mathbf{f}+\mathbf{q}+\mathbf{q}',\mathbf{r})}\times$$

$$\times e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{s}_1+\mathbf{q}'\mathbf{s}_2)}\sqrt{\frac{2\pi}{f}}\frac{i(\mathbf{j},\mathbf{q}'-\mathbf{q})}{(q^2-p_1^2-i\varepsilon)(q'^2-p_2^2-i\varepsilon)}=$$

$$=\frac{ep_1p_2}{2\sqrt{E_1E_2}\pi^3}\sqrt{\frac{2\pi}{f}}\int d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2\, d\mathbf{q}\, e^{-i\mathbf{q}\mathbf{s}_1+i(\mathbf{f}+\mathbf{q},\,\mathbf{s}_2)}\frac{(\mathbf{j}\mathbf{q})}{(q^2-p_1^2-i\varepsilon)(|\mathbf{f}+\mathbf{q}|^2-p_2^2-i\varepsilon)}. \quad (4)$$

Вводим q_z — проекцию $\mathbf{q}$ на направление $\mathbf{f}$ и перпендикулярную к $\mathbf{f}$ часть $\mathbf{g}$:

$$\frac{ep_1p_2}{\sqrt{2\pi^5E_1E_2f}}\int d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2\, e^{i\mathbf{g},\,\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1}\, d\mathbf{g}\,(\mathbf{j}\mathbf{g})\int_{-\infty}^{\infty} dq_z\frac{e^{iq_z(s_{2z}-s_{1z})+ifs_{2z}}}{q_z^2+g^2-p_1^2-i\varepsilon}\frac{1}{[(q_z+f)^2+g_2-p_2^2-i\varepsilon]}. \quad (5)$$

Интегрирование по q_z может быть проведено, замыкая контур интегрирования большой полуокружностью и находя вычеты. Для упрощения при этом используем, что $f-p_1-p_2\approx\frac{m^2f}{2p_1p_2}\to 0$ (m — масса π-частицы). В результате получаем:

$$\frac{\pi iep_1p_2}{\sqrt{2\pi^5E_1E_2f^3}}\int\frac{d\mathbf{s}_1d\mathbf{s}_2\,(\mathbf{j}\mathbf{g})\,d\mathbf{g}}{m^2+g^2}e^{i(p_2s_{2z}+p_1s_{1z})}\,e^{i(\mathbf{g},\,\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1)} \quad (6)$$

(здесь можно $f-p_2$ заменить на p_1, так как s_{2z} мало).

Выразим s_{1z}, используя перпендикулярность $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{p}_1$:

$$s_{1z}=-\frac{\mathbf{s}_1\mathbf{k}_1}{p_1},\quad \mathbf{p}_1=p_1\frac{\mathbf{f}}{f}\left(1-\frac{k_1^2}{2p_1^2}\right)+\mathbf{k}_1,\quad \mathbf{f}\mathbf{k}_1=0,\quad k_1\ll p_1. \quad (7)$$

Пользуясь (7) и аналогичным выражением для s_{2z}, преобразуем (6) ([5]):

$$\frac{iep_1p_2}{\sqrt{2\pi^3E_1E_2f^3}}\int d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2\, d\mathbf{g}\,\frac{\mathbf{j}\mathbf{g}}{m^2+g^2}e^{i(\mathbf{g},\,\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1)-i(\mathbf{s}_1\mathbf{k}_1+\mathbf{s}_2\mathbf{k}_2)}=$$

$$=e\sqrt{\frac{p_1p_2}{2\pi^3f^3}}\int d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2\, e^{-i(\mathbf{k}_1\mathbf{s}_1+\mathbf{k}_2\mathbf{s}_2)}(\mathbf{j}\nabla_{s_2})\int\frac{e^{i(\mathbf{g},\,\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1)}}{m^2+g^2}d\mathbf{g}=$$

$$=e\sqrt{\frac{2p_1p_2}{\pi f^3}}\int d\mathbf{s}_1\, d\mathbf{s}_2 e^{-i(\mathbf{k}_1\mathbf{s}_1+\mathbf{k}_2\mathbf{s}_2)}(\mathbf{j}\nabla_{s_2})\int_0^{\infty}e^{-m|\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1|\,ch\theta}\,d\theta. \quad (8)$$

Переходим теперь к интегралам, содержащим либо Φ_1, либо Φ_2:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2E_1E_2f}}\frac{e}{i}\int e^{i\mathbf{f}\mathbf{r}}\,[e^{-i\mathbf{p}_1\mathbf{r}}(\mathbf{j}\,\nabla\Phi_2^*)+\Phi_1^*\,\mathbf{j}\nabla e^{-i\mathbf{p}_2\mathbf{r}}-$$

$$-e^{-i\mathbf{p}_2\mathbf{r}}(\mathbf{j}\nabla\Phi_1^*)-(\mathbf{j}\nabla e^{-i\mathbf{p}_1\mathbf{r}})\,\Phi_2^*]\,d\tau=$$

$$=\sqrt{\frac{2\pi}{E_1E_2f}}\,e\int[\mathbf{j}\mathbf{p}_1e^{i(\mathbf{f}-\mathbf{p}_1,\,\mathbf{r})}\,\Phi_2^*-\mathbf{j}\mathbf{p}_2e^{i\mathbf{f}-\mathbf{p}_2\mathbf{r}}\,\Phi_1^*]\,d\tau. \quad (9)$$

Пользуемся теперь (3):

$$\frac{ei}{\sqrt{8\pi^5 E_1 E_2 f}}\int e^{i\mathbf{fr}}\,d\tau\left[(\mathbf{jk}_1)p_2 e^{-i\mathbf{p}_1\mathbf{r}}\int d\mathbf{s}_2\,d\mathbf{q}'\,\frac{e^{i(\mathbf{q}',\,\mathbf{r}-\mathbf{s}_2)}}{q'^2-p_2^2-i\varepsilon}-\right.$$

$$\left.-e^{-i\mathbf{p}_2\mathbf{r}}(\mathbf{jk}_2)\,p_1\int d\mathbf{s}_1\,d\mathbf{q}\,\frac{e^{i\mathbf{q},\,\mathbf{r}-\mathbf{s}_1}}{q^2-p_1^2-i\varepsilon}\right]=$$

$$=ei\sqrt{\frac{8\pi}{E_1E_2f}}\left[(\mathbf{jk}_1)\,p_2\,\frac{\int e^{-i(\mathbf{p}_1-\mathbf{f},\,\mathbf{s}_2)}d\mathbf{s}_2}{(\mathbf{f}-\mathbf{p}_1)^2-p_2^2}-\frac{\int e^{i\mathbf{f}-\mathbf{p}_2,\,\mathbf{s}_1}d\mathbf{s}_1\,(\mathbf{jk}_2)\,p_1}{(\mathbf{f}-\mathbf{p}_2)^2-p_1^2}\right]=$$

$$=ei\sqrt{\frac{8\pi}{E_1E_2f^3}}\left[\frac{(\mathbf{jk}_1)\,p_1\,p_2}{m^2+k_1^2}\int e^{i\,(\mathbf{f}-\,\mathbf{p}_1,\,\mathbf{s}_2)}\,d\mathbf{s}_2-\frac{(\mathbf{jk}_2)\,p_1\,p_2}{m^2+k_2^2}\int e^{i\,(\mathbf{f}-\,\mathbf{p}_2,\mathbf{s}_1)}\,d\mathbf{s}_1\right]. \tag{10}$$

Преобразуем интегралы по $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, учитывая (7):

$$\int e^{i\mathbf{f}-\mathbf{p}_1,\,\mathbf{s}_2}\,d\mathbf{s}_2=\int e^{-\,i\mathbf{k}_1\mathbf{s}_2+i\,p_2 s_{2z}}\,d\mathbf{s}_2=\int e^{-i\,(\mathbf{k}_1\mathbf{s}_2+\mathbf{k}_2\mathbf{s}_2)}\,d\mathbf{s}_2=$$

$$=2\pi\frac{R}{k}J_1(kR),\quad \mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2. \tag{11}$$

В соответствии с этим переписываем (11):

$$ei\sqrt{\frac{32\pi^3 p_1 p_2}{f^3}}\left[\frac{\mathbf{jk}_1}{m^2+k_1^2}-\frac{\mathbf{jk}_2}{m^2+k_2^2}\right]\frac{R}{k}J_1(kR). \tag{12}$$

Складывая (8) и (12), находим полный матричный элемент перехода M, так как член, не содержащий Φ_1 и Φ_2, исчезает в силу законов сохранения.

При вычислении (8), (12) главную роль играли расстояния до ядра порядка p_1p_2/m^2f, если $k_1\sim k_2\leqslant m$. Это проще всего можно увидеть из (2) (см. также [1]). Таким образом, пользование ψ-функциями, взятыми вне ядра, законно.

Определяем теперь эффективное сечение процесса:

$$d\sigma_f(\mathbf{p}_1,\,\mathbf{p}_2)=2\pi\,|M^2|\,\frac{dp_{1z}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6}\,|F_{+-}|^2. \tag{13}$$

Появление множителя F вызвано тем, что взаимодействие π-мезонов с γ-квантами может не соответствовать взаимодействию точечной частицы, как это имеет место в (1). Далее возможное существование сильного (в частности неэлектромагнитного) взаимодействия π^+- и π^--частиц друг с другом может привести к тому, что значение ψ-функции, описывающей систему π^+, π^-, при совпадении координат π^+ и π^- будет сильно отличаться от произведения $\psi(\mathbf{r}_1)\,\psi(\mathbf{r}_2)$, аналогично тому, как у заряженной частицы $|\chi(0)|^2$ отличается от $|\chi(\infty)|^2$ на множитель $\frac{2\pi e^2}{v}\left[e^{2\pi e^2/v}-1\right]^{-1}$. (Влияние этого эффекта на образование электронно-позитронных пар было рассмотрено А. Д. Сахаровым [6].) Множитель типа $\left|\frac{\chi(0)}{\chi(\infty)}\right|^2$ может появиться и в наших выражениях. Аналогично [1], влияние всех изложенных выше обстоятельств приводит к появлению в матричном элементе дополнительного множителя F. Следует подчеркнуть, что выделение множителя F возможно только в силу больших расстояний от ядра, играющих роль в нашей задаче.

Влияние возможных конечных размеров π-частиц и их взаимодействия содержится в F, который является функцией от трех инвариантов:

$$\frac{1}{m}\,\omega_1^0=\frac{E_1f-\mathbf{p}_1\mathbf{f}}{m^2},\quad \frac{1}{m}\,\omega_2^0=\frac{E_2f-\mathbf{p}_2\mathbf{f}}{m^2},\quad I=\frac{-\,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2+E_1E_2}{m^2}. \tag{14}$$

ω_1^0 есть частота кванта в системе покоя π^+; ω_2^0 — частота кванта в системе покоя π^-; $l = \frac{1+u^2}{1-u^2}$, где u — скорость π-частиц в системе центра тяжести π^+ и π^-.

В наиболее важном случае, когда $p_1 \sim p_2$, $k_1 \sim k_2 \lesssim m$, все инварианты оказываются порядка единицы, и можно думать, что F по порядку величины равно единице.

Интеграл, входящий в (8), оказывается особенно простым при $mR \gg 1$, т. е. для ядер в середине и конце таблицы Менделеева. Поэтому этот случай заслуживает отдельного рассмотрения.

При $mR \sim 1$ из (8), (12), (13), (14) можно сделать следующие выводы: 1) полное сечение пропорционально e^2R^2 и не зависит от энергии; 2) эффективная область углов равна m/p; 3) распределение по энергиям довольно размытое.

Поступило
5 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Ландау, И. Померанчук, ЖЭТФ, 24, 505 (1953). [2] Л. Ландау, Е. Лифшиц, Теория поля, 2-е изд., 1948, стр. 168. [3] Э. Ферми, Усп. физ. наук, 46, 71 (1952); Progress Theor. Phys., 5, 570 (1950). [4] Л. Ландау, Изв. АН СССР, сер. физ., 17, 51 (1953). [5] И. Н. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы, интегралов, сумм, рядов и произведений, 1951.; Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, 1949, стр. 190. [6] А. Д. Сахаров, ЖЭТФ, 18, 631 (1948).