Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 2

ФИЗИКА

Академик Л. Д. ЛАНДАУ, А. А. АБРИКОСОВ и И. М. ХАЛАТНИКОВ

МАССА ЭЛЕКТРОНА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Одним из наиболее интересных вопросов квантовой электродинамики является вопрос о массе электрона, в частности, о роли электромагнитной и «собственной» масс. Основное значение при решении этого вопроса имеет поведение гриновской функции электрона $G(p)$ при $p \sim m$. В работе [2] найдено асимптотическое выражение для гриновской функции электрона, справедливое при $p \gg m$. Для решения вопроса о массе электрона недостаточно ограничиться только значением этого выражения для $G(p)$ при $p \sim m$, а надо рассмотреть поправки к этому выражению.

Предположим, что функция $G(p)$ имеет вид:

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{\hat{p} - m(p^2)}, \tag{1}$$

где $\beta(p^2)$ — функция, введенная в [2], а $m(p^2)$ — новая медленно меняющаяся функция от p^2. При больших значениях p отношение второго члена в знаменателе к первому становится совершенно ничтожным и, во всяком случае, значительно меньше, чем неточность в определенной нами функции $\beta(p^2)$. Тем не менее, рассмотрение такого члена законно, поскольку он, в противоположность первому, представляет собой четную функцию от вектора p, и поэтому погрешность в определении β не может сказаться на его величине. При больших p $G(p)$ может быть написано в виде:

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{\hat{p}} + \frac{\beta(p^2)\, m(p^2)}{p^2}; \tag{2}$$

здесь первый член является нечетной функцией, а второй — четной функцией от p.

Напишем уравнение для функции G [1]:

$$G^{-1}(p) = \hat{p} - m_1 + \frac{e_1^2}{\pi i}\int \Gamma_\mu(p,\ p-k;\ k)\, G(p-k)\, \gamma_\nu D_{\mu\nu}(k)\, d^4 k \tag{3}$$

и выделим с обеих сторон четные функции p, которые должны равняться друг другу. При определении четной части стоящего с правой стороны интеграла будем, изменяя знак p, менять также знак у переменной интегрирования k. Тогда четная часть стоящего под интегралом выражения будет состоять из произведения четной части Γ_μ (по отношению к изменению знака всех входящих в нее переменных) на четную часть G и произведения нечетной части Γ_μ на нечетную часть G. В первом случае нам достаточно для Γ_μ взять выражение $\alpha(k^2)\gamma_\mu$, а для G — второй член формулы (2). Во втором случае G берется в прежнем виде $\beta(p^2)/\hat{p}$, а нечетная часть Γ_μ должна быть определена из уравнения для Γ_σ (1) [1].

Приравнивая нечетные части выражений, стоящих в обеих сторонах уравнения, мы опять, меняя знаки p и l, изменим в стоящем с правой стороны интеграле знак у переменной интегрирования k. После этого нечетная часть интегрального выражения будет содержать либо четную часть одного из G либо нечетную часть одного из Γ_μ. Другие варианты приводят к членам более высокого порядка малости. Рассмотрим раньше влияние четной добавки к G. Пусть $p \ll l$. Тогда легко убедиться, что главный член выражения возникает от нечетной добавки к $G(p-k)$. Соответствующий интеграл логарифмичен в области $p \ll k \ll l$ и быстро сходится за ее пределами. Непосредственное вычисление дает для него выражение

$$-\frac{e_1^2}{4\pi}\frac{l_\sigma}{l^2}\alpha^2(\eta)\beta(\eta)\int_\xi^\eta \beta(z)\alpha(z)m(z)[3d_t(z)+d_l(z)]\,dz,$$

где попрежнему $\xi = \ln\left(-\frac{p^2}{m^2}\right)$, $\eta = \ln\left(-\frac{l^2}{m^2}\right)$.

Будем теперь искать нечетную часть $\Gamma_\sigma(p,\ p-l;\ l)$ в виде $\frac{l_\sigma}{l^2}\alpha^2(\eta)\beta(\eta)t(\xi,\eta)$ и подставим соответствующую добавку в $\Gamma_\mu(p, p-k; k)$. Можно убедиться в том, что поправки к остальным Γ дают выражения более высокого порядка малости. После этого получаем для $t(\xi,\eta)$ следующее интегральное уравнение:

$$t(\xi,\ \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi}\int_\xi^\eta \alpha^2(z)\beta^2(z)d_l(z)t(\xi,\ z)\,dz -$$

$$-\frac{e_1^2}{4\pi}\int_\xi^\eta \alpha(z)\beta(z)m(z)[3d_t(z)+d_l(z)]\,dz. \tag{4}$$

Подставляя в подинтегральное выражение в (3) выражения для добавок к G и Γ_μ, получаем окончательно для четной части уравнения (3):

$$-\frac{m(\xi)}{\beta(\xi)} = -m_1 + \frac{e_1^2}{4\pi}\int_\xi^L \alpha^2(z)\beta^2(z)d_l(z)t(\xi,z)\,dz -$$

$$-\frac{e_1^2}{4\pi}\int_\xi^L \alpha(z)\beta(z)m(z)[3d_t(z)+d_l(z)]\,dz, \tag{5}$$

откуда

$$m(\xi) = \beta(\xi)[m_1 - t(\xi,\ L)]. \tag{6}$$

Дифференцируя уравнение (4) по η и воспользовавшись формулами $\alpha\beta = 1$ и $\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{e_1^2}{4\pi}\beta d_l$, получаем:

$$\frac{\partial t(\xi,\eta)}{\partial\eta} = \frac{1}{\beta(\eta)}\frac{d\beta(\eta)}{d\eta}t(\xi,\eta) - \frac{e_1^2}{4\pi}m(\eta)[3d_t(\eta)+d_l(\eta)], \tag{7}$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{t(\xi,\ \eta)}{\beta(\eta)}\right) = -\frac{e_1^2}{4\pi}\frac{m(\eta)}{\beta(\eta)}[3d_t(\eta)+d_l(\eta)];$$

учитывая, что, согласно (4), $t(\xi, \eta) = 0$ при $\xi = \eta$,

$$\frac{t(\xi, \eta)}{\beta(\eta)} = -\frac{e_1^2}{4\pi}\int\limits_\xi^\eta \frac{m(z)}{\beta(z)}\left[3d_t(z) + d_l(z)\right] dz,$$

дифференцируя по ξ, получаем отсюда

$$\frac{1}{\beta(\eta)}\frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{e_1^2}{4\pi}\frac{m(\xi)}{\beta(\xi)}\left[3d_t(\xi) + d_l(\xi)\right].$$

Подставляя сюда $\eta = L$, получаем (учитывая $\beta(L) = 1$ из (6))

$$\frac{d}{d\xi}\frac{m(\xi)}{\beta(\xi)} = -\frac{e_1^2}{4\pi}\frac{m(\xi)}{\beta(\xi)}\left[3d_t(\xi) + d_l(\xi)\right],$$

или, воспользовавшись соотношением $\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{e_1^2}{4\pi}\beta d_l$,

$$\frac{dm(\xi)}{d\xi} = -\frac{3e_1^2}{4\pi} d_t(\xi)\, m(\xi).$$

Подставляя для d_t полученное в (3) выражение, получаем окончательно

$$m(\xi) = m(0)\left(1 - \frac{e^2}{3\pi}\xi\right)^{9/4}, \tag{8}$$

где константа $m(0)$ есть значение $m(\xi)$ при $\xi = 0$, т. е. наблюдаемая масса электрона.

Эта формула имеет место только в том случае, если в природе нет других частиц, кроме электрона, не взаимодействующих существенно ни с какими полями, кроме электромагнитного. Если все такого рода частицы имеют спин $^1/_2$, то написанная формула переходит в

$$m(\xi) = m\left[1 - \frac{\nu e^2}{3\pi}\xi\right]^{9/4\nu},$$

где ν — число сортов частиц. В обычных обозначениях (8) имеет вид:

$$m(p^2) = m\left[1 - \frac{e^2}{3\pi}\ln\left(-\frac{p^2}{m^2}\right)\right]^{9/4}. \tag{9}$$

Формула (8) определяет $m(p^2)$ при $|p^2| \gg m^2$. Случай $p^2 \ll m^2$ ничем не отличается от $p^2 \sim m^2$, т. е. ему соответствует с нашей точностью $m(p^2) = m$. При $p^2 = m^2$ знаменатель формулы (1) обращается в нуль, поэтому случай p^2 очень близких к m^2 $\left(e^2 \ln\frac{m^2}{p^2 - m^2} \sim 1\right)$ нуждается в особом рассмотрении.

Как и следовало, формула (9) оказывается градиентно инвариантной и в нее не входит явно радиус «размазывания». Из нее следует, что с увеличением k^2 масса частицы падает. Величина m_1 согласно (6) равна $m(L)$, т. е. соответствует значению k^2, отнесенному к радиусу «размазывания»,

$$m_1 = m\left(\frac{e^2}{e_1^2}\right)^{9/4}.$$

На границе применимости теории $e_1 \sim 1$ и $m_1 \sim m e^{9/2}$, т. е. очень малая величина. Как уже указывалось (3), эта область в действительности не достигается из-за необходимости учета гравитационных эффектов. Повидимому, можно предполагать, что окажется $m(\infty) = 0$, т. е. вся масса электрона электромагнитного происхождения.

Таким образом, анализ (см. также ([1–3])) показывает, что в квантовой электродинамике можно найти выражения для основных функций, которые непосредственно удовлетворяют уравнениям, так что регуляризация сводится просто к изменению обозначений:

$$\Gamma_\mu = \exp\left[\frac{e_1^2}{4\pi}\int_0^L d_l(\xi)\,d\xi\right]\cdot \Gamma'_\mu,$$

$$G = \exp\left[-\frac{e_1^2}{4\pi}\int_0^L d_l(\xi)\,d\xi\right]\cdot G',$$

$$D = \frac{e^2}{e_1^2}D',$$

где Γ'_μ, G' и D' — функции, переходящие при малых p^2 в функции свободных частиц. При этом удается получить асимптотические выражения при импульсах $e^2 \ln\frac{p^2}{m^2}\sim 1$, которые не могут быть получены при использовании обычной теории возмущений.

Применимость полученных формул ограничена двумя обстоятельствами: во-первых, ролью гравитации, во-вторых, как уже указывалось в ([3]), с увеличением p^2 эффективный заряд растет и при достаточно больших p^2 становится порядка единицы, нарушая этим условие применимости теории. Последнее обстоятельство имеет большое принципиальное значение, поскольку оно, по всей вероятности, относится не только к электродинамике, но и к другим взаимодействиям. Повидимому, при больших p^2 мы всегда попадаем в область «сильной связи», даже если в области небольших энергий мы имеем слабую связь.

Полученные формулы в применении к процессам при обычных энергиях, естественно, дают результаты первого неисчезающего приближения теории возмущений. Исключением из этого является рассеяние света светом. В обычной теории возмущений такое рассеяние описывается диаграммой в виде квадрата из четырех электронных линий с четырьмя фотонными хвостами. Между тем, легко видеть, что соединение двумя фотонными линиями двух квадратов (причем опять остаются четыре свободных хвоста) дает эффект, отличающийся на e^4, но содержащий вторую степень логарифма, т. е. с точки зрения нашей теории того же порядка величины. Поэтому решение задачи в этом случае должно даваться суммированием диаграмм с бесчисленным множеством квадратов, соединенных фотонными линиями.

Что касается эффектов при очень больших энергиях, то их вычисление на базе предложенной теории требует дополнительного вычисления величин $\Gamma_\sigma(p,\ q;\ k)$ для случаев, когда одна из величин p^2, q^2 и k^2 велика по сравнению с двумя другими. Кроме, того, можно видеть, что в ряде случаев (например, комптон-эффект при очень больших энергиях) охватывающие фотонные линии дают эффект, с точки зрения нашей теории, того же порядка, что требует составления по тем же принципам новых интегральных уравнений.

В заключение выражаем благодарность И. Я. Померанчуку, А. Д. Галанину и Б. Л. Иоффе за ценные дискуссии.

Поступило
6 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, 95, № 3 (1954). [2] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, 95, № 4 (1954). [3] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, 95, № 6 (1954).